Keletas iškiliojo programavimo uždavinių su atsakymais

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Rasti minimumą | Besąlyginis | Su sąlygom $x\_{1}\geq 0; x\_{2}\geq 0;$$$x\_{1}+x\_{2}\leq 20. $$ |
| (min) $2x\_{1}^{2}+6x\_{1}x\_{2}+5x\_{2}^{2}+10x\_{1}-12x\_{2}$ | (-43;27) | (0; 1,2) |
| (min) $5x\_{1}^{2}+2x\_{1}x\_{2}+x\_{2}^{2}-80x\_{1}+120x\_{2}$ | (25;-85) | (8;0) |
| (min) $x\_{1}^{2}-2x\_{1}x\_{2}+8x\_{2}^{2}+70x\_{1}-14x\_{2}$ | (-39;-4) | (0; 0,875) |
| (min) $3x\_{1}^{2}+4x\_{1}x\_{2}+5x\_{2}^{2}+110x\_{1}-132x\_{2}$ | (-37;28) | (0; 13,2) |
| (min) $3x\_{1}^{2}-4x\_{1}x\_{2}+5x\_{2}^{2}+88x\_{1}-66x\_{2}$ | (-14;1) | (0; 6,6) |
| (min) $-3x\_{1}^{2}+4x\_{1}x\_{2}-2x\_{2}^{2}+8x\_{1}+12x\_{2}$ | (10;13) | (0; 6,6) |
| (min) $x\_{1}^{2}+x\_{2}^{2}-40x\_{1}-20x\_{2}$ | (20;10) | (15;5) p=10 |
| (min) $x\_{1}^{2}+2x\_{2}^{2}-40x\_{1}-40x\_{2}$ | (20;10) | (13,33; 6,67) p=13,33 |
| (min) $5x\_{1}^{2}-6x\_{1}x\_{2}+2x\_{2}^{2}-10x\_{1}$ | (10;15) | (8,077; 11,923) p=0,769 |

Sprendimas

1. Įsitikinti, ar uždavinys iškiliojo programavimo (pvz., apskaičiuoti Hesses (antrųjų funkcijos išvestinių) matricą). Jos pagrindiniai minorai turi būti teigiami.

2a. Besąlyginio minimizavimo atveju funkcijos dalines išvestines pagal kiekvieną kintamąjį prilyginti nuliui ir išspręsti gautą dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą. Gautos nežinomųjų reikšmės ir bus ieškomas sprendinys.

2b. Sąlyginio minimizavimo atveju sudaryti Lagrange'o funkciją

$$λ\left(x,p\right)=φ\left(x\right)+p\left(g\left(x\right)-b\right).$$

 Pavyzdžiui, paskutiniam iš lentelėje nurodytų uždavinių ši funkcija atrodys taip:

$$λ\left(x,p\right)=5x\_{1}^{2}-6x\_{1}x\_{2}+2x\_{2}^{2}-10x\_{1}+p\left(x\_{1}+x\_{2}-20\right).$$

3. Sudaryti lygčių ir nelygybių sistemą

$$\frac{∂λ\left(x,p\right)}{∂x}\geq 0, \frac{∂λ\left(x,p\right)}{∂x}x=0;\frac{∂λ\left(x,p\right)}{∂p}\leq 0, p\frac{∂λ\left(x,p\right)}{∂x}=0, x\geq 0,p\geq 0.$$

Pavyzdžiui, paskutiniam iš lentelėje nurodytų uždavinių ši sistema atrodys taip:

$$\frac{∂λ\left(x,p\right)}{∂x\_{1}}=10x\_{1}-6x\_{2}-10+p\geq 0$$

$$\frac{∂λ\left(x,p\right)}{∂x\_{2}}=-6x\_{1}+4x\_{2}+p\geq 0$$

$$\frac{∂λ\left(x,p\right)}{∂x}x=\left(10x\_{1}-6x\_{2}-10+p\right)x\_{1}+\left(-6x\_{1}+4x\_{2}+p\right)x\_{2}=0$$

$$\frac{∂λ\left(x,p\right)}{∂p}= x\_{1}+x\_{2}-20\leq 0$$

$$p\frac{∂λ\left(x,p\right)}{∂p}= p(x\_{1}+x\_{2}-20)=0$$

$$x\_{1}\geq 0; x\_{2}\geq 0;p\geq 0.$$

Toliau reikia rasti šios sistemos sprendinį. Pradėti galima nuo prielaidos, kad visi nežinomieji teigiami. Tada visos nelygybės tenkinamos kaip lygybės (kodėl?) ir turime tris lygtis su trim nežinomaisiais. Jas išsprendę, gausime sprendinį. Tačiau jei kuris iš nežinomųjų išsprendus būtų neigiamas, reikia nagrinėti kitą variantą, kai vienas kuris nežinomųjų nulis, ir vėl ieškoti sprendinio.

**Išspręskite sudėtingesnius**

(min) $x\_{1}^{2}+3x\_{1}x\_{2}+4x\_{2}^{2}+2x\_{3}^{2}-8x\_{1}+x\_{2}-3x\_{3}$

$$2x\_{1}+4x\_{2}-x\_{3}\leq 5$$

$$3x\_{1}-2x\_{2}+2x\_{3}\leq 15$$

$$x\_{1}\geq 0; x\_{2}\geq 0 x\_{3}\geq 0$$

x =(3;0;1) p= (1;0)

(min) $7x\_{1}^{2}+3x\_{1}x\_{2}+5x\_{2}^{2}+x\_{1}x\_{3}+2x\_{3}^{2}-24x\_{1}-28x\_{2}-15x\_{3}$

$$2x\_{1}-2x\_{2}+4x\_{3}\leq 15$$

$$x\_{1}+5x\_{2}+2x\_{3}\leq 117$$

$$x\_{1}\geq 0; x\_{2}\geq 0 x\_{3}\geq 0$$

x =(1;2;3) p= (0;1)