Šioje paskaitoje pateikiamas dar vienas, kitoks nei ankstesniuose pavyzdžiuose rekursijos taikymas.

McCall tarplaikinės darbo paieškos (intertemporal job search) modelis

Asmuo ieško darbo ir gauna pasiūlymą dirbti už eurų. Jei jis šį pasiūlymą priima, tai toliau visą likusį gyvenimą už tą atlyginimą ir dirba. Taigi nauda iš priimto pasiūlymo yra (Čia – būsimos vertės palyginimas su dabartine). Jei asmuo atsisako šio pasiūlymo, gauna nedarbo draudimo išmoką eurų ir laukia geresnio pasiūlymo. Siūlomas darbo užmokestis yra atsitiktinis dydis, kurio skirstinio funkcija žinoma Kokį darbo užmokesčio pasiūlymą asmuo turėtų priimti?

*Paaiškinimas dėl teiginio „darbo užmokestis yra atsitiktinis dydis, kurio skirstinio funkcija “ ir keli tikimybių teorijos faktai, norint suprasti tolesnį tekstą.*

Funkcija yra tikimybė, kad asmeniui pasiūlytas darbo užmokestis yra mažesnis už . Kitaip tariant, (P -tikimybė). Jei mažiausias darbo užmokestis, koks asmeniui gali būti pasiūlytas, yra , nes mažiau negali būti pasiūlyta. Jei didžiausias darbo užmokestis, koks asmeniui gali būti pasiūlytas, yra , nes daugiau negali būti pasiūlyta.

Funkcija gali būti atvaizduota taip (oranžinė linija):

1

0,4

z

700

m

M

Brėžinyje atvaizduotas vienas taškas: tikimybė, kad bus pasiūlytas uždarbis, mažesnis už 700 eurų, pagal funkciją yra 0,4.

Mums reikės tokių formulių. Vidutinei reikšmei (žymėsime ją ) skaičiuoti naudojame formulę

Apskritai kokios nors funkcijos nuo , sakykim, vidutinei reikšmei skaičiuoti naudosime

Čia yra tiesiog integravimo kintamasis, nepainiokim jo su pačiu atsitiktiniu dydžiu . Dar reikės integravimo dalimis formulės

Grįžkime prie uždavinio Spręsime jį rekursyvinės (Bellmano) funkcijos pagalba. Apibrėšime ją taip: yra maksimali asmens ateityje gaunama nauda, jei jam pateiktas pasiūlymas dirbti už eurų ir asmuo racionaliai pasirenka, priimti šį pasiūlymą arba ne.

Taip galvojant, yra didesnioji iš dviejų naudų: arba priimti pasiūlymą ir turėti naudą arba jį atmesti, apskaičiavus, kad nedarbo draudimo išmoka plius matematinė naudos iš būsimų pasiūlymų viltis yra didesnė. O kaip apskaičiuoti tą matematinę viltį?

Atsiminkim, kad gavus atsitiktinį pasiūlymą nauda yra . Kadangi žinome pasiskirstymą , tai galime apskaičiuoti ir matematinę viltį (arba vidurkį) pagal žinomą formulę

Čia *m* ir *M* – minimali ir maksimali alga, kokia gali būti pasiūlyta asmeniui. Taip samprotaudami, gauname rekurentinę formulę

(1)

Daugiklis prie integralo parodo, kad vertinama būsimo laikotarpio nauda; dėl trumpumo žymima tiesiog , nes kitų pasiskirstymo funkcijų šiame uždavinyje nėra.

Kaip spręsti šią lygtį?

Užrašymo racionalizavimui pažymėkim .

Atkreipkim dėmesį, kad funkcijos struktūra ne tokia jau ir sudėtinga: ji yra maksimumas iš tiesės pagal , būtent , ir konstantos taigi tiesiog laužtė, storesne linija pavaizduota brėžinyje.

Vieta, kur kertasi linijos ir kaip tik ir yra ta vieta, kur darbo pasiūlymas dirbti už eurų pradeda būti naudingesnis už kito pasiūlymo laukimą. Šis dydis ir yra ieškomas, modelyje jis vadinamas „reservation wage“.

Iš to, kas pasakyta, aišku, kad kaip tik ir yra dydis, ties kuriuo sutampa (1) rekurentinės formulės abu nariai, būtent

Atsižvelgę į brėžinyje parodytą struktūrą, dešinįjį integralą padalinsime į du: iki funkcija yra konstanta, o jos reikšmė, kaip matyti iš brėžinio, yra ; nuo ji yra tiesė . Todėl

Atliekame paprastus veiksmus:

(2)

Atkreipkim dėmesį, kad (tikimybė, kad bus siūloma mažesnė už minimalią alga, yra nulis). Pažymėkime vidutinę algą, kokia asmeniui gali būti siūloma, esant pasiskirstymo funkcijai . Pagal žinomą formulę

Išskaidome ją į dėmenis iki ir po:

Iš čia matome, kad

Įstatome į (2) ir gauname

(3)

Dešinėje esantį integralą pertvarkysime, pasinaudodami integravimu dalimis

Dar kartą atsižvelgę į , ir į gautas išraiškas iš (3) pagaliau gauname

(4)

Ši lygtis ir yra mūsų ieškota lygtis su vienu nežinomuoju, būtent , kuris ir yra tas atlyginimas, už kurį verta pradėti dirbti.

Konkrečią reikšmę galima apskaičiuoti, žinant konkrečius duomenis: ir, žinoma, svarbiausia – pasiskirstymą

Eksperimento tvarka apskaičiuokim tolygaus pasiskirstymo atveju, t.y. laikykim, kad

Čia vertėtų priminti, kad yra tikimybė, kad atsitiktinis dydis - pasiūlyta alga yra mažesnė už Formaliai: (P -tikimybė)

Šio skirstinio grafikas

1

M

m

Kadangi šiuo atveju , lygtis (4) virsta

Atlikę integravimo veiksmus, gausime lygtį

Tai kvadratinė lygtis atžvilgiu. Pavyzdžiui, paėmę m = 500; M = 2000, c = 800, , gauname, kad

Čia pateikta modelio versija yra pati paprasčiausia, tačiau gerai demonstruoja rekurentinio modeliavimo galimybę. Literatūroje yra nagrinėtos kur kas sudėtingesnės versijos, pavyzdžiui, modelis, kuriame dirbantysis gali būti atleistas ir vėl ieškoti darbo.

Netgi ir be konkrečios išraiškos galima nustatyti kai kuriuos iš (4) lygybės išplaukiančius faktus. Išraiškoje (4) dydis priklauso nuo parametrų, tarp jų ir nuo nedarbo draudimo išmokos . Tyrėjui gali būti labiau įdomu, kaip tas priklauso nuo didėja ar mažėja? Kitaip tariant, koks yra išvestinės pagal ženklas?

Iš (4) lygties galima tai apskaičiuoti, bet tam reikės Leibnitzo formulės. Imkim apibrėžtinį integralą, kurio abu rėžiai, taip pat ir pointegrinė funkcija priklauso nuo kažkokio prametro .

Tada išvestinę apskaičiuojame taip:

(5)

Pritaikysim šią formulę (4) lygčiai, laikydami, kad yra funkcija ir viską diferencijuodami pagal (formulėje (5) tai parametras ).

Čia iš (5) formulės pritaikėm tik vidurinį narį, nes integralo nei pointegrinė funkcija, nei apatinis rėžis nepriklauso nuo . Dabar gauname, kad

kadangi , o juo labiau , nes 1, kadangi tai tikimybė. Vadinasi, ieškoma išvestinė teigiama, o tai reiškia, kad, padidėjus nedarbo draudimo išmokai, asmuo lauks geresnio (didesnio) algos pasiūlymo.

**Užduotis.** Pabandykite įvertinti, kaip priklauso nuo

Apskaičiuota „rezervavimo alga“ šiame modelyje leidžia taip pat įvertinti, kiek laikotarpių vidutiniškai asmuo turės laukti, kol bus pasiūlyta tinkama alga.

Galvokime taip: pagal apibrėžimą yra tikimybė, kad pasiūlyta alga bus mažesnė už „rezervavimo“ algą . Vadinasi, asmuo pirmame laikotarpyje nepradeda dirbti su tikimybe , o pradeda dirbti su tikimybe .

Jei asmuo nepradėjo dirbti pirmame laikotarpyje, tai su ta pačia tikimybe nepradės dirbti ir antrame. Vadinasi yra tikimybė, kad reikia laukti trečiojo laikotarpio, tačiau būtent antrame laikotarpyje asmuo pradės dirbti su tikimybe .

Panašiai samprotaudami gauname, kad tikimybė laukti iki k-tojo laikotarpio ir tada pradėti dirbti yra . Todėl vidutinis laukimo laikas yra

Kadangi tokia eilutė konverguoja ir jos suma yra

Pavyzdžiui, mūsų nagrintame pavyzdyje , todėl vidutinis laukimo laikas 4,12 – kiek daugiau nei 4 laikotarpiai.

Kitoje paskaitoje nagrinėsime sudėtingesnį šio uždavinio variantą, kuriame bus atsisakyta prielaidos, kad, gavęs darbą, asmuo taip ir dirba jį be galo. Bus įvesta darbo netekimo tikimybė. Iš formaliosuios pusės – tai dar viena įdomi rekursijos taikymo iliustracija.

Prielaida, kad asmuo už pasirinktą atlyginimą toliau visą likusį gyvenimą ir dirba neatrodo realistiška. Todėl ją pakeiskime.

Asmuo ieško darbo ir gauna pasiūlymą dirbti už eurų. Jei jis šį pasiūlymą priima, tai pradeda dirbti už šį atlyginimą, bet kiekvieną būsimą laikotarpį jis gali būti su tikimybe atleistas iš darbo. Tada jis gauna nedarbo draudimo išmoką ir vėl ieško darbo, laukia darbo pasiūlymo. Kaip ir ankstesniame variante, jei asmuo atsisako pasiūlymo, gauna nedarbo draudimo išmoką eurų ir laukia geresnio pasiūlymo. Siūlomas darbo užmokestis yra atsitiktinis dydis, kurio skirstinio funkcija žinoma Kokį darbo užmokesčio pasiūlymą asmuo turėtų priimti?

Spręsime šį uždavinį netgi dviejų rekursyvinių funkcijų pagalba. Tegu dabar yra maksimali **neturinčio darbo (nedirbančio)** asmens ateityje gaunama nauda, jei jam pateiktas pasiūlymas dirbti už eurų ir asmuo racionaliai pasirenka, priimti šį pasiūlymą arba ne. Tegu yra maksimali **turinčio darbo (dirbančio)** asmens ateityje gaunama nauda, jei jis jau dirba už eurų , bet su tikimybe gali darbo netekti.

Apskaičiuosime pirmiausia .

Su tikimybe asmuo lieka dirbti, gauna atlyginimą , į kitą laikotarpį pereina kaip dirbantis, taigi būsimųjų laikotarpių nauda yra (Čia – kaip ir anksčiau būsimos vertės palyginimas su dabartine). Taigi su tikimybe visa būsimoji nauda yra .

Su tikimybe asmuo netenka darbo, gauna išmoką ir į kitą laikotarpį pereina jau kaip darbo ieškantis (nedirbantis). Taigi nauda yra plius diskontuota matematinė viltis iš visų būsimų pasiūlymų. Ją jau esame apskaičiavę kaip . Todėl

(1)

Čia *m* ir *M* – minimali ir maksimali alga, kokia gali būti pasiūlyta asmeniui, o vietoje kaip ir anksčiau rašome tiesiog .

Užrašymo racionalizavimui kaip ir anksčiau pažymėkim ir apskaičiuokim išraišką iš (1) formulės.

Nesunku pamatyti, kad

Dabar skaičiuosime Netekęs darbo asmuo, gavęs pasiūlymą , renkasi maksimumą: priimti pasiūlymą ir tada jo naudos matematinė viltis bus ; arba atmesti pasiūlymą ir tada jo naudos matematinė viltis bus Todėl

Įstatome mūsų jau gautą išraišką

Pertvarkius

(2)

Kaip spręsti šią lygtį?

Atkreipkim dėmesį, kad funkcijos struktūra panaši kaip ankstesniu atveju: ji yra maksimumas iš tiesės pagal , būtent ir konstantos taigi tiesiog laužtė, storesne linija pavaizduota brėžinyje. Tačiau dabar tiesė eina nebe per koordinačių pradžią, o aukščiau dėl dėmens

Vieta, kur kertasi linijos ir kaip tik ir yra ta vieta, kur darbo pasiūlymas dirbti už eurų pradeda būti naudingesnis už kito pasiūlymo laukimą. Šis dydis ir yra ieškomas, modelyje jis vadinamas „reservation wage“.

Iš to, kas pasakyta, aišku, kad kaip tik ir yra dydis, ties kuriuo sutampa (2) rekurentinės formulės abu nariai, būtent

Pertvarkę šią lygtį, nesunkai gauname, kad

(3)

Išoriškai tai ta pati lygtis kaip ir ankstesniu atveju, tačiau čia ne tas pats, nes dabar kitokia, atsižvelgianti į darbo netekimo galimybę. Skaičiuosime išraišką.

Atsižvelgę į brėžinyje parodytą struktūrą, integralą padalinsime į du: iki funkcija yra konstanta, o jos reikšmė, kaip ką tik gavome, yra ; nuo ji yra tiesė . Todėl

Atliekame paprastus, bet daug rašymo reikalaujančius technikos veiksmus:

Kaip ir anksčiau, pažymėkime vidutinę algą, kokia asmeniui gali būti siūloma, esant pasiskirstymo funkcijai . Pagal žinomą formulę

Išskaidome ją į dėmenis iki ir po:

Iš čia matome, kad

Įstatome į gautą integralo išraišką, apskaičiuojame reiškinius ir gauname

Norėdami gauti kiek įmanoma paprastesnę integralo išraišką, kaip ir ankstesniu atveju, pasinaudosime integravimu dalimis:

Atsižvelgę, kad , pagaliau gauname ieškomą integralo išraišką.

Įstatome ją į pagrindinę (3) lygtį:

Atlikę paprastus algebrinius veiksmus, gausime

(4)

Ši lygtis ir yra mūsų ieškota lygtis su vienu nežinomuoju, būtent , kuris ir yra tas atlyginimas, už kurį verta pradėti dirbti šiuo atveju. Atkreipkime dėmesį, kad kai (tikimybė netekti darbo – nulis), ši lygtis sutampa su gautąja anksčiau, kai nebuvo atleidimo iš darbo. Tai netiesiogiai patvirtina, kad nepadarėme klaidų.

Konkrečią reikšmę galima apskaičiuoti, žinodami konkrečius duomenis: ir, žinoma, svarbiausia – pasiskirstymą

Eksperimento tvarka praeitą kartą apskaičiavome tolygaus pasiskirstymo atveju:

Gavome kvadratinę lygtį atžvilgiu. Paėmę m = 500; M = 2000, c = 800, , gavome, kad Analogišką kvadratinę lygtį gautume ir dabar. Su tais pačiais duomenimis, bet su atleidimo iš darbo tikimybe gautume 1352,75. Pasirinkimo sumažėjimą nulemia, matyt, tai, kad dabar atlyginimą asmuo renkasi nebe visam likusiam gyvenimui.

Netgi ir be konkrečios išraiškos galima nustatyti kai kuriuos iš (4) lygybės išplaukiančius faktus. Išraiškoje (4) dydis priklauso nuo parametrų, tarp jų ir nuo tikimybės netekti darbo . Tyrėjui gali būti labiau įdomu, kaip tas priklauso nuo didėja ar mažėja? Kitaip tariant, koks yra išvestinės pagal ženklas?

Pritaikysim Leibnitzo formulę (4) lygčiai, laikydami, kad yra funkcija ir viską diferencijuodami pagal.

Čia iš (5) formulės pritaikėm tik vidurinį narį, nes integralo nei pointegrinė funkcija, nei apatinis rėžis nepriklauso nuo . Dabar gauname, kad

Reiškinys kairėje turėtų būti teigiamas, kadangi , nes tai tikimybė; juo labiau , nes 1. Reiškinys dešinėje turėtų būti neigiamas, nes tikriausiai asmuo rinksis dirbti tik už atlyginimą, didesnį už nedarbo draudimo išmoką. Vadinasi, ieškoma išvestinė neigiama, o tai reiškia, kad, didėjant tikimybei netekti darbo, asmuo šiame modelyje sutiks dirbti už mažesnį atlyginimo pasiūlymą. Mūsų skaitinis eksperimentas šią išvadą patvirtina.

Apskaičiuota „rezervavimo alga“ šiame modelyje, kaip ir ankstesniame, leidžia papildomai įvertinti, kai kuriuos pakankamai svarbius dalykus, Pavyzdžiui, „stacionarų“ nedarbo lygį.

Tegu laikotarpiu t neturinčių darbo asmenų (tokių, kurie gali tikėtis siūlymo dirbti už atlyginimą intervale nuo m iki M) dalis (nedarbo lygis) yra . Užimtųjų dalis tada atitinkamai yra

Skaičiuosim t.y. kokia bus nedirbančiųjų dalis sekančiame laikotarpyje

neteks darbo.

Nedirbančiųjų daliai bus pasiūlyta per mažas atlyginimas, taigi ir nedirbs. Todėl

Kai procesas stabilizuojasi (tampa stacionarus) ir . Tada

arba

Mūsų nagrinėtame pavyzdyje 0,568502, todėl modeliu spėjamas nagrinėtos asmenų grupės „stacionarus“ nedarbo lygis yra 0,32.