Daugiažingsniai optimalaus valdymo uždaviniai

Su daugiažingsniais optimalaus valdymo uždaviniais susiduriame, modeliuodami situacijas, kuriose reikalingas daugkartinis išdėstytas laike sprendimų priėmimas, atsižvelgiantis į jau priimtus sprendimus, jų pasėkoje pasikeitusią situaciją ir t.t.

Formuluosime uždavinį diskrečiame laike t = 0,1,2, ... Toks pasirinkimas geriau atitinka ūkio procesų logiką, nes daugelis rodiklių fiksuojami tam tikrais laiko momentais: pavyzdžiui, bendras vidaus produktas, kainos, investicijos ir daugelis kitų dalykų fiksuojami metais, ketvirčiais, dienomis, bet ne kiekvieną akimirką. (Nors, reikia pasakyti, kad ir tolydaus laiko modeliai gali būti ir yra sudaromi.)

Pagrindiniai modelio kintamieji yra du. Pirmasis vadinamas *būsenos* kintamuoju (*state variable*) yra n-matis vektorius, aprašantis modeliuojamos sistemos būseną laikotarpiu *t* (laikykime, kad šio laikotarpio pabaigoje). Antrasis vadinamas *valdymo* kintamuoju (*control variable*) yra m-matis vektorius, aprašantis modeliuojamoje sistemoje priimtus sprendimus laikotarpiu *t.*

Taigi visą modeliuojamą procesą įsivaizduojame taip:

Kitaip tariant, startuojant nuo būsenos  **,** priimamas sprendimas **,** dėl šio sprendimo sistema atsiduria būsenoje **,** tada vėl priimamas sprendimas ir t.t. Dažniausiai modeliuojamas baigtinio laiko procesas t = 0,1,2, ... T, bet neretai naudingi ir modeliai su begaliniu laiku.

Šį daugiažingsnį ryšį užrašysime tam tikros funkcijos pagalba: **.** Tai ir bus pagrindinė sudaromo modelio lygtis (pagal analogiją su fizika kartais vadinama fazine lygtimi), angliškai – *law of motion.* Atkreipkime dėmesį, kad bendru atveju rašome  **,** kitaip tariant, laikome, kad fazinė lygtis gali keistis laike.

Svarbu: būsena laikotarpio t pabaigoje priklauso tik nuo būsenos praeito laikotarpio pabaigoje ir nuo priimtų sprendimų, bet *tiesiogiai* nepriklauso nuo ankstesnių būsenų. Taigi modeliuojamo proceso „gylis“ yra tik vienas laikotarpis, kas nebūtinai atitinka tikrovę ir ką reikėtų įsidėmėti kaip uždavinio formulavimo pirmąją prielaidą.

Toliau reikia atsižvelgti į faktą, kad sprendimas (valdymas) laikotarpiu t gali būti ne bet koks – jo galimybes nulemia aplinkybės, kurios, be kita ko, priklauso nuo praeito laikotarpio pabaigoje pasiektos būsenos. Šias aplinkybes atvaizduosime tam tikrų aibių, galbūt irgi kintančių laike, pagalba: .

Gali būti, kad ne kiekviena būsena yraleistina (pavyzdžiui, negali būti neigiamų reikšmių). Todėl į modelį bendru atveju tenka įtraukti priklausomybes ; čia yra užduotos leistinų būsenų aibės.

Sekos ir , tenkinančios išvardintas priklausomybes, vadinamos *leistinomis atitinkamai būsenos ir valdymo trajektorijomis (feasible paths).*

Uždavinio esmė – iš visų leistinų trajektorijų išrinkti geriausią Jai nusakyti turime suformuluoti tikslo funkciją, kurią laikysime sudaryta iš kiekvieną laikotarpį įvertinančių dėmenų **.** Reikia optimizuoti šių dėmenų sumą (dėl apibrėžtumo užrašysime maksimizavimo uždavinį)

Svarbu: Ši tikslo funkcija sumuoja atskirų atskirai įvertintų laikotarpių naudingumą (sakoma, yra *adityvi*). Tikrovėje nebūtinai taip yra ir adityvumo prielaidą fiksuokime kaip mūsų formuluojamo uždavinio antrąją prielaidą.

Dabar užrašysime visą uždavinį

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |
|  | (2) |
|  | (3) |
|  | (4) |

Analogiškas uždavinys gali būti užrašytas ir tolydaus laiko atveju, tačiau dėl jau minėtų priežasčių mes nagrinėsime diskretaus laiko uždavinį.

Imkime labai paprastą šio uždavinio **pavyzdį,** labiau skirtą iliustruoti matematiniam sprendimo aparatui, negu konkrečioms turininėms išvadoms gauti.

Tegu eurų reikia T metų dalinti vartojimui ir taupymui. Metų t pradžioje dalį turimų lėšų skiriame vartojimui, likusią dalį investuojame metams su grąža .

Pažymėkime metų t-1 pabaigoje turimas lėšas, o sprendimą, kiek suvartoti t metais. Tada dalis liks investicijoms, ir metų t pabaigoje turėsime lėšų, iš jų skirsime vartojimui ir t.t. Naudingumo funkciją, kaip dažnai įprasta, rinksimės įgaubtą (tai reiškia, kad kiekvienas papildomas euras vis mažiau padidina vartojimo naudingumą) – tolesnių skaičiavimų paprastumui tuo tikslu naudosime logaritminę funkciją. Taigi ln( yra vartojimo naudingumas. Be to, skirtingų laikotarpių naudingumo palyginimui naudokime diskontavimo koeficientą (gauti 1 kitąmet prilyginama gavimui šiemet).

Gauname tokį uždavinį (palyginkite su bendruoju)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (5) |
|  |  | (6) |
|  |  | (7) |
|  |  | (8) |

Daugiažingsnį optimalaus valdymo uždavinį suformulavome pirmiausia tam, kad jo pavyzdžiu vėliau parodytume *dinaminio programavimo* metodo esmę ir taikymą. Tačiau prieš pereidami prie sprendimo dinaminio programavimo metodu, panagrinėkime labiau tradicinį sprendimo būdą, besiremiantį jau mums žinomais klasikiniais netiesinio programavimo metodais.

Norėdami sprendimo logiką parodyti kuo suprantamiau, palikime uždavinyje tik (5) ir (7) sąlygas, tikėdamiesi, kad gausim sprendinį, kuriame likusios bus patenkintos savaime. Užrašymams sutrumpinti pažymėkime .

Dabar bandykime pritaikyti jau žinomą klasikinį optimizavimo metodą šiam uždaviniui. Juk turime tikslo funkciją (8) su T nežinomųjų ir T lygčių – apribojimų (5), kuriuose dalyvauja nežinomieji ir (laikomas užduotu). Ką mes darėme su tokiu uždaviniu? Rašėme jam Lagrange‘o funkciją, skaičiavome jos išvestines pagal visus kintamuosius, prilyginome tas išvestines nuliui ir taip gavome kritinį (stacionarų) tašką, kuris tikėtinai buvo minimumas ar maksimumas. Padarykime taip pat ir dabar.

Mūsų uždavinys turi 2T nežinomųjų, kuriuos galime įsivaizduoti kaip ilgą juos visus apjungiantį vektorių , kurį, atsižvelgdami į dvilypę nežinomųjų specifiką, žymėkime ( ); Lagrange‘o funkcijai sudaryti mums reikia dar vienos sekos nežinomųjų – Lagrange‘o daugiklių kiekvienam iš (5) apribojimų. Žymėkime tą seką (anksčiau žymėjome kita raide - , bet šiuo atveju labiau įprastas žymėjimas. Taigi Lagrange‘ o funkciją L užrašysime taip:

Pasinaudoję sigmos ženklu, turime

 (9)

Atkreipkime dėmesį: taip užrašydami nepadarėme nieko labai kitokio, negu jau esame darę: prie tikslo funkcijos pridėjome sumą apribojimų, padaugintų iš Lagrange‘o daugiklių.

O dabar skaičiuokime išvestines pagal visus nežinomuosius. Atkreipę dėmesį, kad įeina ne į vieną, o į du dėmenis sudėtyje, gauname išvestinę pagal , po to ir pagal ir

(10)

(11)

(12)

Šios trys lygtys leis apskaičiuoti kritinį tašką. Bendru atveju reikėtų tikrinti aprėmintąją Hesse matricą, tačiau dėl uždavinio didumo to nedarysime, pasikliausime tuo, kad dėl logaritminės funkcijos įgaubtumo tai bus maksimumas, be to, globalus ir vienintelis (žinoma, reikėtų ir formalaus įrodymo).

Užrašome (11) lygtį dviems gretimiems laikotarpiams

Atkreipiame dėmesį, kad dėl (10) , todėl antrąją lygybę galime užrašyti

Iš čia, atsižvelgę į pirmąją lygybę, gauname, kad , todėl

(13)

Ši lygybė mums ir nurodo, kokios taisyklės turi laikytis optimali valdymų seka.

Išdėstytas sprendimo būdas gali būti apibendrintas bendram uždaviniui. Prie to grįšime vėliau, o dabar, pasinaudodami (13), baikime spręsti pavyzdį.

Tegu pradžioje turimos lėšos, o – pirmasis sprendimas (vartojimas pirmąjį laikotarpį). Tada pagal (5) arba (12) ir pagal (13) apskaičiuojame

Tęsiant nesunku įsitikinti, kad

 (14)

Dabar abi trajektorijos ir išreikštos per pradinį pasirinkimą . Atkreipkim dėmesį, kad tikslo funkcijos reikšmė yra

o ši reikšmė tuo didesne, kuo didesnis . Tačiau jo pasirinkimą riboja (14) sąlyga: kaip ir visi ankstesni, negali tapti neigiamas. Todėl belieka paimti

kas ir pabaigia optimalios trajektorijos konstravimą.

Tokio pobūdžio modeliai paprastai labiau domisi stacionariomis būsenomis (*steady state*), kai laikotarpių skaičius neribojamas ( Šiame uždavinyje mus domintų, kokia turėtų būti optimali vartojimo norma, t.y. kokią dalį u iš likusių lėšų x reikėtų pastoviai vartoti, neplanuojant laikotarpio pabaigos. Todėl ieškokim ribos Iš (5) matome: . Perrašom tai tokiu būdu:

Perėję prie ribos, gauname

Iš čia suprastinus lengvai apskaičiuojama arba , t.y. stacionariame režime reikia pastoviai vartoti disponuojamų lėšų dalį, o likusią investuoti.

Optimalių trajektorijų paieškos principą, kurį pritaikėme konkrečiam paprastučiam uždaviniui, dabar apibendrinsime. Nagrinėkime „klasikinį“ uždavinį be nelygybių. Jo fazinė lygtis vienmačių kintamųjų atveju:

O tikslo funkcija

Kaip ir pavyzdyje, sudarome Lagrange‘o funkciją

 (15)

Ieškosime šios funkcijos išvestinių ir prilyginsime jas nuliui. Užrašymo paprastumo dėlei susitarkime, kad rašysime kaip . Išvestinę rašysime kaip . Tą patį darysime ir su funkcijos išvestinėmis. Nesusipratimų dėl to nekils, nes abi funkcijos priklauso nuo vieno aiškiai apibrėžto *x* ir nuo vieno *u.*

Skaičiuodami išvestinę pagal , nepamirškime, kad nuo šio kintamojo priklauso du dėmenys Lagrange‘o funkcijos išraiškoje. Todėl

(16)

(17)

Padauginam (16) iš

Remdamiesi (17), iš čia gausim

Eliminavę , dabar eliminuosim ir . Tuo tikslu padauginsim paskutiniąją lygtį iš :

 (17) užrašysim t+1 atvejui

Raudonai atžymėti dydžiai identiški, todėl įstatom iš apatinės lygties išraišką į viršutinę

(18)

Tai ir yra Eulerio lygtis mūsų uždaviniui. Ji nurodo būtinas sąlygas, kurias turi tenkinti optimalios būsenos ir valdymo trajektorijos.

Galim pasitikrinti, ar nesuklydom, pritaikydami šią formulę paprastučiam anksčiau nagrinėtam uždaviniui. Tame uždavinyje , . Kadangi šiame uždavinyje nepriklauso nuo , tai , ir pirmas dėmuo (18) lygtyje lygus nuliui. Toliau ; ; ; . Įstatom į (18):

o tai (suprastinus)ir yra sąlyga (13), kurią anksčiau gavome tiesiogiai.

Pritaikysim gautą lygtį dar vienam šiek tiek sudėtingesniam uždaviniui. Vienas iš paprasčiausių makroekonominių dinaminių modelių gali būti užrašytas tokiu būdu:

(19)

(20)

Čia bendrasis t metų produktas, išreiškiamas Cobbe‘o Douglaso funkcijos pagalba kaip t metų pradžioje (t-1 metų pabaigoje) turimo kapitalo ir darbo jėgos veikimo rezultatas (A – konstanta). Dalis to produkto metais t iš karto atitenka vartojimui, o likusi tampa kitų metų kapitalu. (Modelio konstrukcija gali būti ginčytina, bet čia jis mums reikalingas ne tiek realiai analizei, kiek matematinio sprendimo metodo iliustracijai.)

Tokio pobūdžio modeliuose įprasta kintamuosius performatuoti vienam dirbančiajam. Žymėsime atitinkamus kintamuosius mažosiomis raidėmis: , : , : ir pereisime prie šių kintamųjų:

Uždavę egzogeninį darbo jėgos augimo tempą ir pažymėję , pereiname prie tokios lygties:

(21)

Vėl paprastumo dėlei panaudosime logaritminę naudingumo funkciją – ieškosime tokių vartojimo ir kaupimo trajektorijų, kurios leistų maksimizuoti diskontuotą sumarinį dirbančiojo vartojimą per T metų. Taigi reikia rasti

Kad būtų parankiau šiam uždaviniui pritaikyti (18) lygtį, laikinai peržymėkim kintamuosius šios lygties žymėjimais: ir . (Iš tikrųjų, juk yra valdymo kintamasis – parodo sprendimą, kiek skiriama vartojimui, o – būsenos kintamasis, parodantis galimybes, kuriomis disponuojame.) Taip pervardinus, bendrojo uždavinio fazinės lygties funkcija

 ,

o tikslo funkcija

Suskaičiuosime reikalingas į (18) lygtį (pakartota aukščiau) įstatyti išvestines. Kadangi ir šiame uždavinyje nepriklauso nuo , tai , ir pirmas dėmuo (18) lygtyje lygus nuliui.

Toliau ; ; ; .

Įstatom į (18):

Iš čia

Arba grįžus prie pradinių žymėjimų

(22)

Iš šios priklausomybės ir iš (21) lygties galėtume žingsnis po žingsnio konstruoti optimalias kintamųjų trajektorijas. Tačiau tokio pobūdžio modeliuose tyrėjus dažniausiai domina, į ką konverguoja kintamųjų reikšmės arba kokia yra stacionaraus augimo būsena (*steady state*), kokios jos proporcijos.

Laikydami, kad kai procesas trunka pakankamai ilgai, t.y. , priimame, kad kintamųjų trajektorijos konverguoja į stacionarias reikšmes: . Pereidami atitinkamose lygtyse prie ribos, galime gauti šias reikšmes. Iš (22) turime , todėl

Panašiai rasime ir kitas stacionarias reikšmes. Tyrėją gali dominti ne tik jos, bet ir jų santykiai, sakykim, t.y. bendrojo produkto dalis, kurią optimalu skirti vartojimui. Šį santykį galime rasti iš tokių sumetimų. Kadangi todėl . Iš čia

Kadangi (21) lygtyje perėjus prie ribos , o išraišką jau turime, tai

Stacionarių dydžių radimas svarbus ir vadinamųjų DSGE (*Dynamic Stochastic General Equilibrium*) modelių analizėje. Suradus stacionarias reikšmes, modelį sudarančios funkcijos linearizuojamos (sutiesinamos) šių reikšmių aplinkoje ir taip gautas modelis tyrinėjamas.

**Užduotis.** Pamėginkite aukščiau išdėstytais metodais patyrinėti kiek kitokį modelį:

Nuo ankstesnio jis skiriasi tuo, kad čia skaičiuojamas kaip „nenusidėvėjusi“ dalis, o prieaugį sudaro „nesuvartota“ dalis .

Čia parodytas sprendimo būdas dažnai būna naudingas diskretaus laiko ekonominių procesų modeliams nagrinėti. Tačiau gali pasitaikyti uždavinių, kuriuose mūsų ignoruotos sąlygos ir gautame sprendinyje savaime nėra patenkintos, be to, jos paprastai aprašomos nelygybėmis, o mūsų nagrinėtas sprendimo būdas nelygybių „neįsileido“. Todėl konstruojami sudėtingesni sprendimo būdai, priimamos papildomos prielaidos dėl uždavinio sąlygų, jį sudarančių funkcijų savybių (iškilumas ir pan.). Tačiau tradiciniai sprendimo būdai vienaip ar kitaip „atsispiria“ nuo Lagrange‘o funkcijos.

Dinaminio programavimo metodas šiuo požiūriu yra „revoliucinis“, jis prieina prie uždavinio kitaip, be to, remiasi daugelyje atvejų labai naudingu ir įdomiu *rekursijos* principu. Todėl verta susipažinti būtent su juo. Apie visa tai – artimiausiose paskaitose.