**Optimizavimo uždaviniai – nuo klasikinių prie iškiliojo programavimo.**

**1o. Bendras matematinio programavimo uždavinys. Iškiliojo programavimo uždavinys.**

Jau praeitą kartą suformulavome tokį bendrą matematinio programavimo uždavinĮ

(extr)

Čia yra ieškomas vektorinis nežinomasis (laikykime, n-matis), kuris turi priklausyti *leistinų planų* *aibe*i ir minimizuoti arba maksimizuoti *tikslo funkciją* Turinio prasme tai reiškia, kad ieškome kažkokio n-mačio sprendimo (kiek kurio produkto gaminti, kiek į kokius aktyvus investuoti, kiek kokių prekių pirkti ir pan.), kuris atitiktų turimas galimybes, apibrėžiamas aibės pagalba, ir kartu duotų didžiausią pelną, mažiausias sąnaudas ir pan., kurie apskaičiuojami funkcijos pagalba.

Praeitą kartą nagrinėjome uždavinio sprendimą tuo atveju, kai aibė buvo arba visa n-matė tesinė erdvė arba jos dalis, aprašoma lygybėmis **.** Atkreipkime dėmesį, kad jokių nelygybių, sakykim, tokių kaip arba net į uždavinį „neįsileidome“. Tai, ką nagrinėjome, neretai vadinama „klasikiniu“ uždaviniu, o dabar turime pereiti prie bendro *matematinio programavimo* uždavinio, kuriame aibė gali būti apibrėžiama ne tik lygybėmis.

Apibrėžtumo dėlei formuluokime jį kaip minimizavimo uždavinį (esant maksimizavimo reikalui, užtektų tiesiog pakeisti tikslo funkcijos ženklą):

|  |  |
| --- | --- |
| (min) | **(1)** |

*Globaliu* funkcijos minimumu aibėje vadinsime tokį , kad visiems

*Lokaliu* funkcijos minimumu aibėje vadinsime tokį , kuriam galima surasti tokią aplinką kad visiems .

Kitaip tariant, globalaus minimumo taškas – pats geriausias visoje aibėje; lokalaus minimumo taškas – pats geriausias tik tam tikroje savo aplinkoje , bet ne visoje aibėje. (Kaip „aplinka“ suprantama kokia nors atvira aibė, kuriai priklauso taškas, pavyzdžiui, skritulys aplink šitą tašką).

Toliau pateikiamame brėžinyje atvaizduojama leistinų planų aibė, dvi tikslo funkcijos lygio linijos (tai tokios kreivės, kurių visuose taškuose tikslo funkcijos reikšmė ta pati: vienoje 3, kitoje 2) ir parodyti lokalus bei globalus minimumai. Lokaliame tikslo funkcijos reikšmė 3, ir tai yra geriausia jos reikšmė sankirtoje , bet ne geriausia visoje aibėje. Globalaus minimumo taške tikslo funkcijos reikšmė yra 2.

Lokalus minimumas

Aplinka

Globalus minimumas **x\***

­Lygio linija ϕ = 2

­Lygio linija ϕ = 3

Globalaus ir lokalaus optimumų egzistavimas gerokai komplikuoja matematinio programavimo uždavinio sprendimą. Suradus kokį lokaliai geriausią tašką, dar nežinia, ar ji tikrai pats geriausias visoje aibėje. Toks neapibrėžtumas yra vienas iš motyvų išskirti atskirą matematinio programavimo uždavinių klasę – *iškiliojo programavimo* uždavinius, kuriuose jei jau minimumas lokalus, tai jis būtinai ir globalus. Norint tai padaryti, pirmiausia reikia apsibrėžti *iškiliosios aibės* ir *iškiliosios funkcijos* sąvokas.

Tiesinės n-matės erdvės aibė vadinama *iškiliąja aibe*, jei bet kokiems dviem taškams ir ir bet kokiam skaičiui galoja priklausomybė

Iškilioji aibė Neiškilioji aibė

Kaip turėtų būti aišku iš brėžinio, apibrėžimas sako, kad iškilioji aibė yra tokia, kurios bet kuriuos du taškus sujungus atkarpa, visa ta atkarpa bus aibėje.

Iškiliosios aibės yra visa erdvė , jos neneigiamas ortantas, kurį žymėsime **,** pusplokštumė arba puserdvė ( dalis esanti vienoje pusėje nuo kurios nors hiperplokštumos) ir t.t. Verta atkreipti dėmesį, kad iškiliųjų aibių sankirta taip pat yra iškilioji aibė.

Funkcija , apibrėžta iškilioje aibėje , vadinama *iškiliąja funkcija*, jei bet kokiems dviem taškams ir ir bet kokiam skaičiui galioja nelygybė

(2)

Brėžinyje atvaizduota vieno kintamojo iškilioji funkcija. Brėžiniu norima parodyti, kad iškiliąja laikome tokią funkciją, kurios grafiko bet kuriuos du taškus jungianti styga visada yra aukščiau už patį funkcijos grafiką.

Elementarių iškiliųjų funkcijų pavyzdžiai: laipsninės: x2, x2n, eksponentinė ex, hiperbolinė 1/x (x>0) ir daugelis kitų. Nesunku įsitikinti, kad iškiliųjų funkcijų suma, taip pat iškiliosios funkcijos sandauga su teigiama konstanta – taip pat iškilioji funkcija.

Į priešingą pusę „išlinkusi“ funkcija taip pat turi savo pavadinimą ir apibrėžimą.

Funkcija , apibrėžta iškilioje aibėje , vadinama *įgaubtąja funkcija*, jei funkcija yra iškilioji funkcija šioje aibėje.

Pavyzdžiui, logaritmas ln(x) yra įgaubtoji funkcija.

Iškilioji funkcija vadinama griežtai iškiliąja, jei (2) nelygybė tenkinama kaip griežta nelygybė visiems . Atitinkamai apibrėžiama ir *griežtai įgaubtoji* funkcija.

Atkreipkite dėmesį, kad tiesinė funkcija yra tuo pačiu metu ir iškilioji, ir įgaubtoji, bet ne griežtai.

Uždavinys

|  |  |
| --- | --- |
| (min) | **(3)** |

vadinamas *iškiliojo programavimo uždaviniu*, jei tikslo funkcija yra iškilioji funkcija, o leistinų planų aibė - iškilioji aibė.

Kadangi daugelis ekonominės analizės uždavinių gali būti modeliuojami, pasitelkiant būtent iškiliąsias funkcijas, iškiliojo programavimo uždaviniai gali būti labiau tinkama modeliavimo priemonė, nes jie paprastesni ir sprendžiami bei tiriami lengviau, negu bendri matematinio programavimo uždaviniai.

**2o Daugiamačių funkcijų iškilumo būtinos ir pakankamos sąlygos.**

Suformulavę kokį nors praktinį uždavinį, turime mokėti atpažinti, ar tai iškiliojo programavimo uždavinys, kad galėtume teisėtai taikyti atitinkamus jo sprendimo metodus. Tam mums reikia išnagrinėti kai kurias būtinas ir pakankamas funkcijų iškilumo sąlygas, kurios leis ne tik atpažinti iškiliąsias funkcijas, bet ir taps pagrindu sprendimo algoritmams sukurti.

Priminsiu, kad funkcijos pirmųjų dalinių išvestinių matricą eilutę susitarėme žymėti

...

Teorema: Tegu funkcija apibrėžta ir tolygiai diferencijuojama iškilioje aibėje . Ši funkcija yra iškilioji šioje aibėje tada ir tik tada, kai bet kokiems dviem taškams ir tenkinama sąlyga:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Šio fakto neįrodinėsime, bet pasiaiškinkime, ką jis reiškia grafiškai.

Formulės (4) dešinėje pusėje esantys nariai yra ne kas kita, kaip funkcijos „sutiesinimas“ taške **,** kitaip tariant, aprašo jos grafiko liestinės, nubrėžtos šiame taške, lygtį. Todėl (4) nelygybė apibrėžia iškiliąją funkciją kaip tokią, kurios grafikas visada „riečiasi“ aukščiau už bet kokią to grafiko liestinę. Sąlyga (4) galėtų būti alternatyviu funkcijos iškilumo apibrėžimu, bet ji reikalauja, kad funkcija turėtų tolydžias pirmos eilės išvestines, ko nereikalauja (2) sąlyga, taigi pastaroji yra bendresnė.

Prie (4) dar grįšim, ieškodami būtinų ir pakankamų optimalaus sprendimo sąlygų, o dabar suformuluokim dar vieną būtiną ir pakankamą funkcijos iškilumo sąlygą, kuri leis mums praktiškai tikrinti funkcijos iškilumą.

Teorema: Tegu funkcija apibrėžta ir du kartus tolygiai diferencijuojama iškilioje aibėje . Ši funkcija yra iškilioji šioje aibėje tada ir tik tada, kai jos Hesses matrica H(**x**) yra neneigiamai apibrėžta kiekviename šios aibės taške.

Šio fakto neįrodinėsime, bet pritaikysime jį praktiškai funkcijų iškilumui patikrinti. Kaip žinome iš praeito karto, H(**x**) neneigiamam apibrėžtumui pakanka, kad šios matricos pagrindiniai minorai būtų teigiami. Tuo ir pasinaudosime.

**1 pavyzdys.** . Skaičiuojam išvestines

= ( ), H(**x**) =

Patikrinam pagrindinius minorus: 4 > 0; 4·10 - 6·6 > 0, taigi funkcija iškilioji visoje R2 erdvėje (plokštumoje).

Beje, jei funkcija būtų , tada H(**x**) = ir funkcijos iškiliąja laikyti neturime pagrindo.

**2 pavyzdys.** . Tai trijų kintamųjų funkcija, todėl reikėtų tikrinti 3 x 3 dimensijos matricos minorus. Tačiau atkreipkime dėmesį, kad nuo ankstesnės ši funkcija skiriasi tik dėmenimis , kurie yra tiesinė ir kvadratinė, taigi iškiliosios funkcijos. O iškiliųjų funkcijų suma – iškilioji funkcija, taigi H(x) galim ir neskaičiuoti. Kas kita būtų, jei atsirastų dar vienas dėmuo, sakykim .

Patikrinkit, ar ši funkcija iškilioji:

.

O jei vietoj būtų ?

**3o Sprendimas paprasčiausiais atvejais, kai leistinų planų aibė arba**  .

Sprendimo algoritmą sukonstruosime, pasinaudodami iškiliosios funkcijos būtina ir pakankama sąlyga (4).

**Teiginys:** Tegu iškilioji tolygiai diferencijuojama iškilioje aibėje funkcija. yra (3) uždavinio sprendinys tada ir tik tada, kai patenkinta sąlyga

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

Šios sąlygos pakankamumas tam, kad būtų iškiliojo programavimo uždavinio sprendinys akivaizdus iš (4) nelygybės, užrašius ją taip, kad vietoj būtų , o vietoj būtų tiesiog  **:**

Antroji nelygybė gauta iš to, kad paraudoninta dalis pagal (5) neneigiama, kokį bepaimtume **.** Taigi išeina, kad kokį beimtumėm leistiną **,** vis tiek bus , o tai ir reiškia, kad yra minimumo taškas.

Šios sąlygos būtinumo čia neįrodinėsime; beje, jo įrodymui net nereikia funkcijos iškilumo.

Taigi dabar žinome, kad užtenka rasti tokį , kuris tenkintų (5) sąlygą, ir uždavinys bus išspręstas. Tačiau kaip tai padaryti? Pasirodo, paprasčiausiais atvejais, kai leistinų planų aibė arba , tai visai nesunku padaryti.

**Atvejis** Kitaip tariant, šiuo atveju minimumo ieškome visoje erdvėje , o tai reiškia, kad jokių apribojimų nėra iš viso – tiks bet kokios reikšmės.

Įsitikinsime, kad šiuo atveju būtina ir pakankama minimumo sąlyga yra **,** t.y. paprasčiausias pirmosios išvestinės prilyginimas nuliui.

Iš tikrųjų, jei **,** taivadinasi, (5) teisinga ir yra minimumas, taigi sąlyga pakankama.

Iš kitos pusės, jei teisinga (5) **,** tai bus teisinga ir kai(kadangi teisinga bet kokiam **.** Todėl gauname Tačiau nelygybė yra teisinga ir kaipaimsime Tada iš jos gauname, jogO taip gali būti tik tada, kai yra teisinga lygybė Bet tada iš (5) matome, kadTačiau koks gali būti tas **,** kad ką iš jo bedaugintume, vis tiek negausime neigiamo dydžio? Todėl nieko kito nelieka, kaip pripažinti ir būtina minimumo sąlyga.

**Atvejis** Kitaip tariant, šiuo atveju minimumo ieškome ne visoje erdvėje , o tik tarp neneigiamų reikšmių, kas gali būti labai svarbu taikymuose.

Įsitikinsime, kad šiuo atveju būtinos ir pakankamos sąlygos, kad būtų minimumas yra šios:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

Iš tikrųjų, jei galioja (6), todėl **,** tai padauginę šią eilutę iš bet kokio neneigiamo  gausime neneigiamą sandaugą Atėmę panariui iš šios nelygybės (6) lygybę, gausime, kad teisinga , o tai yra ne kas kita, kaip (5) ir galioja visiems . Bet (5) galiojimas reiškia, kad yra minimumas, taigi sąlyga pakankama.

Iš kitos pusės, jei teisinga (5) **,** tai bus teisinga ir kai(kadangi teisinga bet kokiam **.** Todėl gauname Tačiau nelygybė yra teisinga ir kaipaimsime Tada iš jos gauname, jogO taip gali būti tik tada, kai yra teisinga pirmoji iš (6) sąlygų - lygybė Bet tada iš (5) matome, kadTačiau koks gali būti tas **,** kad kokį neneigiamą vektorių iš jo bedaugintume, vis tiek negausime neigiamo dydžio? Todėl nieko kito nelieka, kaip pripažinti ir antrąja būtina minimumo sąlyga.

**Pavyzdys**. Pritaikykim gautus rezultatus ankstesniame pavyzdyje nagrinėtos funkcijos minimizavimui ir .

.

Funkcijos iškilumu įsitikinome jau anksčiau. Pirmosios išvestinės:

= ( )

**1.** Ieškodami minimumo (besąlyginio) prilyginame šias išvestines nuliui ir gauname dvi lygtis su dviem nežinomaisiais:

,

.

Išsprendę šias lygtis, gauname , kad

**2.**Dabar ieškosime minimumo , t.y. reikalaudami, kad sprendinys būtų neneigiamas. Todėl gautasis aukščiau netinka. Šiuo atveju (6) sąlygos atrodys taip:

,

.

(,

Jų sprendimas nėra toks paprastas kaip aukščiau. Teks nagrinėti kelis variantus.

1. Laikykim, kad Tada lygtyje ( abu skliaustuose esantys reiškiniai turi būti nuliai (neigiami jie būti negali pagal užrašytas sąlygas, o jei bent vienas būtų teigiamas, tai ir visas reiškinys būtų teigiamas, o reikia, kad būtų nulis). Bet jei abu skliaustuose esantys reiškiniai – nuliai, tada jau žinome, kad Tai prieštarauja prielaidai , vadinasi, ji neteisinga.

2. Laikykim, kad Tada turi būti nulis, kitaip šio reiškinio sandauga su bus teigiama ir dėl to nebus patenkinta trečioji iš reikalaujamų sąlygų. Tačiau iš to, kad išplaukia, kad . Ir vėl gaunam prieštaravimą priimtai prielaidai, todėl ir ji neteisinga.

3. Laikykim, kad Dabar jau antras reiškinys skliaustuose turi būti lygus nuliui. Tada ir visa trečioji sąlyga bus patenkinta. Iš to gauname, kad todėl . Taigi galimas minimumas yra Kad tuo įsitikintume, turime peržvelgti dar ir pirmas dvi sąlygas: , . Visos patenkintos, taigi gavome ieškomą minimumo tašką.

Varianto tikrinti nereikia, nes sprendinį jau gavome. Tačiau kai kuriuose uždaviniuose gali tekti prieiti ir iki jo.

**Užduotys**

1. Raskite toliau nurodytų funkcijų minimumus ir .

. (4;-1) (1/7; 0)

. (-1;5) (0;14/3)

2. Raskite toliau nurodytos funkcijos minimumus ir .

. (1;-2;3) (0;0;1)

**4.1o Sprendimas, kai leistinų planų aibė apibrėžiama netiesinėmis nelygybėmis**

Šiuo atveju n > 1, o aibė apibrėžiama m netiesinių nelygybių, kurias užrašysime m funkcijų pagalba. Taigi uždavinys dabar:

(min)

....

Arba sutrumpintai

|  |  |
| --- | --- |
| (min)  **.** | (1) |

Labai panašų uždavinį sprendėme nagrinėdami 4 temą, tačiau, sprendimas dabar bus kitoks. Atrodo, koks čia skirtumas – nelygybės vietoj lygybių, tačiau tai keičia visą sprendimo būdą. Nebegalėsime panaudoti aprėmintų Hesses matricų, apsiribosime tik iškiliosiomis funkcijomis, užtat, jei uždavinys bus *iškiliojo programavimo* (nebe *klasikinis*, kaip minėjome anksčiau), jį išsprendę gausim *globalų,* o ne *lokalų* sprendinį (minimumą), kadangi iškiliojo programavimo uždavinyje lokalus ekstremumas yra ir globalus.

Kadangi nusprendėme apsiriboti iškiliojo programavimo uždaviniais, laikykime, kad ir visos – iškiliosios funkcijos. Bet ar tai garantuoja, kad mūsų uždavinio leistinų planų aibė

yra iškilioji aibė? Šį faktą nesunku patikrinti. Tam reikia paimti bet kuriuos du taškus ir , bet kokį skaičių ir įsitikinti, kad Dėl iškilumo bet kuriai iš funkcijų  galime užrašyti

,

kadangi ir . Todėl ir

o tai reiškia, kad , jei tik ir .

Įsitikinę, kad turime tikrai iškiliojo programavimo uždavinį (reikiamų funkcijų iškilumą patikrinti mokame), pereisime prie sprendimo. Ir šiuo atveju naudosime jau žinomą Lagrange‘o funkciją

Be jau žinomų kintamųjų, čia įvedama dar m naujų: . Laikome, kad užrašyta matrica eilute, stulpeliu, taigi jų sandaugą galima užrašyti be jokių papildomų ženklų.

Lagrange‘o funkcijos *balno tašku* vadinsime porą  **,** tokią, kad

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

visiems ir visiems **.**

Kitaip tariant, balno taškas yra minimumas pagal ir tuo pačiu maksimumas pagal **.** Toks yra balno paviršiaus vidurys, iš čia ir pavadinimas.

Balno taškas labai svarbus uždavinio sprendimui štai dėl ko:

Teiginys: Jei yra Lagrange‘o funkcijos balno taškas, tai yra (1) uždavinio sprendinys.

Įrodymas. Imkim (2) kairiąją pusę išskleistu pavidalu:

Suprastinę gausime

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

Kadangi tai galioja visiems , galime paimti taip pat ir **.** Gausime

, taip pat ir

Vadinasi, nieko kito nelieka kaip

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Todėl iš (3) matome, kad

Paėmę , gauname, kad , t.y. ; panašiai galime įsitikinti, kad visiems *i ,* todėl  **,** taigi yra leistinas planas. (atkreipkite dėmesį, kad apibrėžiant balno tašką to nebuvo reikalaujama, tiesiog turėjo būti ir tiek.

Dabar kreipkimės į (2) nelygybių dešiniąją pusę

Dėl (4) matome, kad visiems

bet juk visiems leistiniems , t.y tokiems, kad **.** Todėl ir

visiems leistiniems , t.y tokiems, kad **.** Taigi ir yra ieškoma minimali reikšmė, o – optimalus planas.

Dabar aišku, kad suradę balno tašką, rasime ir uždavinio sprendinį. Kitaip tariant, balno taško sąlyga yra *pakankama* sąlyga sprendiniui (beje, ją įrodydami net nesinaudojome iškilumo prielaida). Tačiau ar ši sąlyga *būtina* ? Gal yra toks „pasislėpęs“ minimumas, kuris nesusijęs su balno tašku arba to balno taško iš viso nėra, o minimumas yra. Į šį klausimą atsako kur kas sudėtingesnė Kunho-Tuckerio teorema, kuri tvirtina, kad jei yra (1) uždavinio sprendinys, tai tada būtinai atsiras toks, kad pora sudarytų Lagrange‘o funkcijos balno tašką. Įrodymas čia kur kas sudėtingesnis, jis iš esmės remiasi dalyvaujančių funkcijų iškilumu, be to, reikalaujama ir vadinamoji *reguliarumo* sąlyga (tokio egzistavimas, kad būtų **).**

Matome, kad dabar iškiliojo programavimo uždavinio (su reguliarumo sąlyga) sprendimą galime tapatinti su balno taško paieška. O tam reikia surasti besąlyginį minimumą pagal ir neneigiamą maksimumą pagal

Tačiau kaip tai daryti iškiliosioms funkcijoms jau nagrinėjome. Belieka pritaikyti Lagrange‘o funkcijai. Dar kartą atkreipkim dėmesį į šią funkciją

Reikia rasti jos minimumą pagal ( kol kas laikom fiksuotu). Atkreipkim dėmesį, kad tai iškilioji pagal funkcija, nes – iškilioji, o antras dėmuo yra m neneigiamų dydžių ir iškiliųjų funkcijų sandaugų suma. Iš praeito karto žinome, kad būtina ir pakankama minimumo sąlyga šio atveju – pirmosios išvestinės lygybė nuliui. Taigi turime rasti tokį , kad

Tačiau tame pačiame taške turi būti dar ir maksimumas pagal . Jei dabar laikysim fiksuotu, tai matysim, kad Lagrange‘o funkcija yra tiesinė pagal . O tiesinė funkcija, nors ir negriežtai, bet taip pat iškilioji. Vadinasi, jai galime pritaikyti ekstremumo paieškos aibėje taisyklę, žinomą iš praeito karto (išvestinė neneigiama, išvestinės ir paties kintamojo sandauga – nulis). Kadangi reikia maksimumo, o turime minimumo taisyklę, tai šią taisyklę pritaikysim, pakeitę ženklą, t.y. funkcijai . Gausim , kad turi būti tenkinamos sąlygos

Pašalinę minusus ir pakeitę nelygybę, kur reikia, pagaliau gauname būtinas ir pakankamas minimumo sąlygas:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

Pritaikysim jas konkretaus uždavinio sprendimui

**1 pavyzdys.** Sprendžiam uždavinį su apribojimais

(min) ;

Patikrinam tikslo funkcijos ir leistinų planų aibės iškilumą. Tikslo funkcijos Hesses matricos

pagrindiniai minorai teigiami: 10 ˃ 0; 10·4 – (-6)·(-6) ˃ 0. Apribojimai tiesiniai, o tiesinė funkcija iškilioji, todėl turime iškiliojo programavimo uždavinį.

Užrašom jam Lagrange‘o funkciją (apribojimas tik vienas, taigi tik vienas ir ):

Pagal (5) sudarom lygčių ir nelygybių sistemą balno taškui surasti:

Toliau reikia rasti šios sistemos sprendinį. Su dviem paskutinėmis priklausomybėmis elgsimės panašiai kaip praeitą kartą – nagrinėsime variantus, kuris pasiteisins. O variantų šiuo atveju tik du: arba arba Pradėkime nuo pirmojo. Jei , tai dėl lygybės reiškinys skliaustuose – nulis. Taigi turime trijų lygybių su trimis nežinomaisiais sistemą

Ją išsprendę, gauname. x1 = 8,077; x2 =11,923; p=0,769.

Šis planas tenkina visus apribojimus, taigi jis ir yra ieškomas minimumas, o varianto galime nebetikrinti.

**2 pavyzdys. „Pavydžios seserys“.** Tėvas nori padalinti dviem seserims 200€. Pirmai - antrai . Kadangi seserys yra pavydžios, tai pirmosios sesers laimingumas priklauso ne tik nuo to, kiek gavo ji pati, bet dar ir sumažėja priklausomai nuo to, kiek gavo antroji – dydžiu /100. Tą patį galima pasakyti ir apie antrąją seserį. Taigi tėvas norėtų maksimizuoti bendrą laimingumą

su sąlyga

Tai maksimizavimo uždavinys, bet, pakeitę tikslo funkcijos ženklą, paverčiame jį minimizavimo uždaviniu

su sąlyga

Tai iškiliojo programavimo uždavinys (Hesses matricos galime netikrinti, kadangi tikslo funkciją sudaro tik tiesinės funkcijos ir kvadratai). Rašome Lagrange‘o funkciją ir skaičiuojame (5) sąlygas

Kaip ir ankstesniame pavyzdyje nagrinėjame du variantus: arba arba Pradėkime nuo pirmojo. Jei , tai dėl lygybės reiškinys skliaustuose – nulis. Taigi turime trijų lygybių su trimis nežinomaisiais sistemą

Išsprendę šias lygtis, gausime . Bet tai prieštarauja prielaidai, jog . Vadinasi, . Iš čia akivaizdu, kad optimalus planas yra o sąlyga patenkinta kaip griežta nelygybė (nes seserys per daug pavydžios...)

**4.2o Sprendimas, kai leistinų planų aibė apibrėžiama netiesinėmis nelygybėmis ir neneigiamumo sąlyga**

Formuluodami (1) uždavinį, mes nereikalavome, kad būtų Tačiau taikymuose dažniausiai neigiamos nežinomųjų reikšmės nėra priimtinos. Todėl dabar apsvarstykime, kaip keisis būtinos ir pakankamos minimumo sąlygos (5), jei šis reikalavimas bus įtrauktas į uždavinį.

Dabar Lagrange‘o funkcijos balno tašką apibrėšime su nedideliu pakeitimu: vietoj reikės reikalauti , kitaip tariant,

Lagrange‘o funkcijos *balno tašku* vadinsime porą  **,** tokią, kad

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2a) |

visiems ir visiems **.**

Visi tolesni samprotavimai (atitinkamai modifikuoti) tinka, tačiau dabar, ieškodami balno taško, turėsime minimizuoti ne pagal visus, o pagal neneigiamus Todėl vietoj (5) būtinų ir pakankamų sąlygų visumos turėsime sudėtingesnę (skirtumai paraudoninti)

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5a) |

**Pavyzdys.** Spręsime uždavinį

(min) ;

Pirmiausia turime patikrinti, ar tikslo funkcija iškilioji. Apskaičiuojame Hesses matricą ir patikriname, kad jos pagrindiniai minorai teigiami; 4 > 0; 280-64 > 0. Funkcijos ir tiesinės, taigi iškiliosios.

Užrašome Lagrange‘o funkciją (m=2)

Išrašome visas (5a) sąlygas

Šios sistemos sprendimui reikėtų nagrinėti nežinomųjų reikšmių variantus: nuo visų keturių teigiamų iki visų keturių nulių Iš viso būtų 16 variantų, bet suradus tinkamą, likusių galima nebetikrinti.

1 variantas. Pradėsim nuo . Kaip ir ankstesniuose pavyzdžiuose tai reiškia, kad visos nelygybės virsta lygybėmis ir turime 4 lygtis su 4 nežinomaisiais:

;

Iš dviejų paskutinių lygčių nustatome, kad , o tada apskaičiuojame, kad . Taigi varianto prielaida nepasiteisino. Kadangi , spėkim variantą, kur būtų .

2 variantas. Tegu . Dabar tik pirmos trys nelygybės privalo virsti lygybėmis, o vietoj iš karto įstatom 0.

;

Išsprendę šias lygtis, gauname . Sprendimas būtų baigtas, bet turime dar patikrinti, ar gautas sprendinys tenkina **visas** išrašytas (5a) sąlygas. Pirmas keturias jis tenkina kaip lygybes (taip buvo apskaičiuotas), tačiau penktąją turime patikrinti. Tikrai, nesunku įsitikinti, kad . Kadangi patenkinta ir šeštoji sąlyga, gautą rezultatą galime pripažinti optimaliu planu (minimumu).

**Užduotis.** Išspręskite

(min) ;

Atsakymas: (2;0;4).

**Gamybos planavimo uždavinys su kainodra.** Suformuluokite iškiliojo programavimo uždavinį ir išspręskite

Įmonė gamina dvi produktų rūšis, naudodama dviejų rūšių išteklius. Išteklių sąnaudos ir disponuojamas kiekis:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 1 produkto vienetui | 2 produkto vienetui | Disp. kiekis |
| 1 išteklių (kg) | 3 | 5 | 130 |
| 2 išteklių (kg) | 4 | 2 | 90 |

Žinoma, kad roduktų paklausą (x1;x2) su kainomis (K1; K2) sieja tokie sąryšiai:

**x1 = 200 - 20K1 ; x2 = 190 – 10K2**

Kiek kokio produkto gaminti ir kaip nustatyti kainas, kad gautos iš pardavimo pajamos būtų maksimalios?

Sprendimą galite pasitikrinti <http://web.vu.lt/ef/t.medaiskis/optimizavimo-metodai/>

Kompiuterinės programos, sprendžiančios netiesinio (taip pat ir iškiliojo) programavimo uždavinius, dažniausiai naudoja *iteracinius* sprendimo metodus, kai prie ieškomo sprendinio artėjama žingsnis po žingsnio – iteracijomis. Aukščiau išdėstytas optimalaus plano paieškos būdas labiau tinka ne kaip tiesioginis sprendinio paieškos būdas, o kaip teorinis pagrindas tiems iteraciniams algoritmams pagrįsti, įvertinti, ar sprendinys jau gautas.

Tačiau Lagrange‘o daugikliais pagrįstas sprendinio identifikavimo būdas gali būti ir yra naudojamas kaip uždavinio analizės instrumentas. Labai svarbų vaidmenį čia vaidina vadinamoji *gaubtinės teorema* (envelope theorem), kurios atskirą atvejį dabar panagrinėkime.

**50. Apie gaubtinės teoremą.**

Visos teoremos čia neformuluosime, todėl bandykime ne visiškai formaliai samprotauti, norėdami išsiaiškinti jos esmę.

Išsprendę iškiliojo programavimo uždavinį, gauname optimalų sprendinį  **,** tenkinantį apribojimąir optimalią tikslo funkcijos reikšmę , taip pat ir . Tačiau analitikui labiau gali rūpėti ne tiek pats sprendinys, kiek įvertinimas, kaip sprendinys pasikeistų, jei keistųsi aplinkybės (išteklių apimtys, kainos, pelnai ir pan., kuriuos atspindi vektorius ), kitaip tariant, priklausomybės ir . Bandysime tokį įvertinimą rasti.

Pažymėkime . Ši funkcija ir rodys optimalios tikslo funkcijos reikšmės priklausomybę nuo parametrų Mėginsim rasti jos išvestinę paprastesnio uždavinio be neneigiamumo reikalavimo atveju. Skaičiuojam pagal sudėtinės funkcijos diferencijavimo taisykles

(6)

Kairėje lygties pusėje yra 1 x m matrica eilutė, dešinėje – 1 x n matricos eilutės ir n x m matricos sandauga.

Kadangi yra optimumas, tai pagal būtinas ir pakankamas sąlygas (5) žinome, kad

(7)

Dešinėje lygties pusėje suskaičiuota išvestinė pagal **.**

Padauginsim dešiniąją (7) pusę iš

Sulyginę tai su (6) matome, kad

(8)

Dabar prisiminkime dar vieną lygybę, kurią gavome, įrodinėdami balno taško pakankamumą

Atsimindami, kad dabar priklauso nuo diferencijuokime ją pagal Gausime

Kadangi yra vienetinė matrica, matome, kad

Sulyginę tai su (8), gauname, kad

Tai ir yra dalinis gaubtinės teoremos teiginys. Jis mums sako, kad Lagrange‘o daugikliai (arba dualūs mūsų uždavinio kintamieji) *yra ne kas kita, kaip matas, parodantis, kokią įtaką turi parametrų* *pokytis minimaliai tikslo funkcijos reikšmei.* (Minusas formulėje reiškia, kad, kuriam nors padidėjus, kitaip tariant, galimybėms prasiplėtus, tikslo funkcijos reikšmė sumažėja, nes juk ieškome minimumo).

Jei išspręsite pasiūlytą gamybos planavimo uždavinį, gausite, kad Tai reiškia, kad papildomas pirmųjų išteklių vienetas vienetas gali pridėti prie pajamų 3 papildomus piniginius vienetus; kitaip tariant, šiuo atveju dualūs kintamieji (Lagrange‘o daugikliai) parodo išteklių ribinį naudingumą.

Bendroji gaubtinės teorema leidžia įvertinti ne tik poveikį optimaliai tikslo funkcijos reikšmei, bet ir kitų parametrų, įeinančių į funkcijų sudėtį, poveikį.