**Optimizavimo uždaviniai – nuo paprasčiausių iki sudėtingų.**

Kaip žinia, bendras matematinio programavimo uždavinys gali būti užrašytas

(extr)

Čia yra ieškomas vektorinis nežinomasis (laikykime, n-matis), kuris turi priklausyti *leistinų planų* *aibe*i ir minimizuoti arba maksimizuoti *tikslo funkciją* Turinio prasme tai reiškia, kad ieškome kažkokio n-mačio sprendimo (kiek kurio produkto gaminti, kiek į kokius aktyvus investuoti, kiek kokių prekių pirkti ir pan.), kuris atitiktų turimas galimybes, apibrėžiamas aibės pagalba, ir kartu duotų didžiausią pelną, mažiausias sąnaudas ir pan., kurie apskaičiuojami funkcijos pagalba.

Nagrinėsime uždavinio sprendimą nuo paprasčiausio iki vis sudėtingesnių atvejų.

**10.** Paprasčiausias atvejis n=1, o aibės nėra, kitaip tariant reikia maksimizuoti ar minimizuoti vieno kintamojo funkciją be jokių apribojimų. Jei funkcija diferencijuojama (turi išvestinę). sprendimas žinomas dar iš mokyklos: randame išvestinę ir prilyginam nuliui: . Surastas vadinamas *kritiniu (arba stacionariu) tašku* ir toliau tiriamas. Jei antroji išvestinė tai minimumas, jeigu tai maksimumas, bet jei , reikia tirti toliau. Ieškome trečiosios išvestinės šiame taške, . Jei ji nelygi nuliui, nėra nei minimumas, nei maksimumas. Jei ji lygi nuliui, skaičiuojame ketvirtą išvestinę. Jei ji teigiama – minimumas, jei neigiama – maksimumas, o jei ir ji lygi nuliui, skaičiuojame penktą išvestinę, taikydami tokią pat taisyklę kaip trečiajai išvestinei, jei reikia – šeštajai kaip ketvirtajai ir t.t.

*Pavyzdys nepateikiamas – per daug paprasta*

20. n > 1, o aibės nėra, kitaip tariant reikia maksimizuoti ar minimizuoti n kintamųjų funkciją be jokių apribojimų. Elgiamės panašiai kaip ir pirmuoju atveju – skaičiuojame išvestines (šiuo atveju tai bus n dalinių išvestinių, kurias surašysime į matricą eilutę

 ...

Dabar turime šią eilutę, t.y. visus jos narius prilyginti nuliams. Gausime n lygčių sistemą su n nežinomųjų.

 ...,

Ją išsprendę, gausime kritinį tašką  **,** kurį tikrinsime, minimumas tai ar maksimumas. Tam naudosime antrąsias išvestines, kurios šiuo atveju sudarys vadinamąją Hesses matricą H(**x**). Beje, ši matrica visada simetriška.

H(x) =

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | ... |  |
|  |  | ... |  |
|  |  |  |  |
|  |  | ... |  |

Jei Hesses matrica H(**x**) kritiniame taške yra teigiamai apibrėžta, tai taškas **x** yra funkcijos lokalaus minimumo taškas.

Jei Hesses matrica H(**x**) kritiniame taške yra neigiamai apibrėžta, tai taškas **x** yra funkcijos lokalaus maksimumo taškas.

Tačiau ką reiškia „teigiamai apibrėžta“ ir kaip tai patikrinti?

Kvadratinė matrica vadinama teigiamai apibrėžta, jei, paėmę bet kokį n-matį nenulinį vektorių **z** ir padauginę jį (transponuotą) iš kairės ir iš dešinės iš H, t.y. apskaičiavę **z‘Hz**, gausime teigiamą skaičių. Norint patikrinti, ar taip yra, reikia apskaičiuoti vadinamus pagrindinius matricos H minorus, t.y. determinantus iš kairiojo viršutinio kampo:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |   |

Ir taip toliau iki .

Jei visi šie determinantai teigiami, matrica teigiamai apibrėžta, ir mūsų kritinis taškas – minimumas.

Jei H1 ženklas neigiamas, H2 teigiamas, H3 vėl neigiamas, H3 teigiamas ir t.t., matrica neigiamai apibrėžta, ir mūsų kritinis taškas – maksimumas.

Pritaikysim šią taisyklę pavyzdžiams.

**1 pavyzdys.** Tegu reikia rasti funkcijos ekstremumą. Kadangi n = 2, turės du elementus, kuriuos abu prilyginame nuliui:

 =

 =

Nesunku įsitikinti, kad šių dviejų lygčių sprendinys: Tai ir yra mūsų kritinis taškas. Dabar apskaičiuosime Hesses matricą, kad patikrintume, minimumas tai ar maksimumas.

Reikia patikrinti jos pagrindinius minorus. Matome, kad

H1 = 4> 0; H2 = = 4·10 - 6·6 > 0, taigi surastas kritinis taškas – minimumas.

Kadangi funkcija buvo kvadratinė (nebuvo aukštesnio laipsnio kaip 2 narių), tai H(x) buvo konstanta (nepriklausė nuo x). Tačiau taip yra ne visada, ir tenka tikrinti ne vieną kritinį tašką.

**2 pavyzdys**

Tegu reikia rasti funkcijos ekstremumą. Kadangi n = 2, turės du elementus, kuriuos abu prilyginame nuliui:

 =

 =

Nesunku įsitikinti, kad šios dvi lygtys turi du sprendinius: Tai ir yra mūsų kritiniai taškai. Dabar apskaičiuosime Hesses matricą, kad juos patikrintume,

Dabar nebe konstanta, o priklauso nuo . Vadinasi, į jos išraišką turime įstatyti gautus kritinius taškus. Gausime dvi skirtingas matricas:

Pirmajai matricai H1 = 2 > 0, H2 = 2·5 - 5·5 < 0, taigi neatitinka reikiamų kriterijų ir nėra nei minimumas, nei maksimumas.

Antrajai matricai H1 = 8 > 0, H2 = 8·5 - 5·5 > 0, taigi atitinka minimumo kriterijų ir yra minimumas.

**Savarankiškam sprendimui. Rasti ekstremumą**

**Pavyzdys su konkuruojančiomis įmonėmis**

Dvi įmonės gamina panašų produktą. Tegu pirmosios gamybos apimtis , antrosios - . Produkto kaina rinkoje priklauso nuo pagaminamo kiekio:

Pirmosios įmonės sąnaudos gamybai yra , antrosios - .

Pirmas variantas: įmonės laisvai konkuruoja rinkoje. Tada įmonių pelnai (apskaičiuojami padauginant gaminamos produkcijos kiekį iš pardavimo kainos ir atimant gamybos sąnaudas) yra tokie:

Kai kiekviena įmonė maksimizuoja savo pelną atskirai, pirmoji maksimizuoja savo pagal savo gamybos apimtį , antroji savo pagal savo gamybos apimtį . Todėl kaip būtinos maksimumo sąlygos (pagal 10 ) gaunamos tokios lygtys:

 =

 =

Kadangi antrosios išvestinės neigiamos (pirmosios funkcijos -10, antrosios taip pat -10), šios sąlygos yra tikrai maksimumo sąlygos.

Išsprendę šias lygtis, gauname tokias gamybos ir pelno apimtis: Galima tikėtis, kad laisvai konkuruojant rinkoje (įmonėms prisitaikant vienai prie kitos) tokia gamybos ir kainų pusiausvyra nusistovės rinkoje.

Antras variantas: pirmoji įmonė yra lyderis. Ji paskelbia savo gamybos apimtį , o antroji įmonė prisitaiko.

Taigi antroji įmonė sprendžia maksimizavimo uždavinį

jau žinodama reikšmę. Iš jau žinomos sąlygos gausime, kad

Tačiau pirmoji firma žino, kaip prisitaikys antroji, todėl ji priima savo sprendimą, jau atsižvelgdama į antrosios reakciją, taigi maksimizuoja

Tai vieno kintamojo reiškinys, taigi maksimumą lengvai rasime, suskaičiavę išvestinę ir prilyginę ją nuliui

Gausim tokias gamybos ir pelno apimtis:

Trečias variantas: įmonės veikia bendru (karteliniu) susitarimu. Tada jos maksimizuoja bendrą pelną, kuris jau yra dviejų kintamųjų funkcija

Ieškosim šios funkcijos maksimumo, kaip aiškinomės 20.

 =

 =

Išsprendę šias lygtis, gauname tokias gamybos ir pelno apimtis:

Dar reikia įsitikinti, kad tai iš tikrųjų maksimumas. Skaičiuojam Hesses matricą:

 H1 = -10 < 0; H2 = (-10)(-12) – (-10)(-10) > 0 , o tai atitinka 20  suformuluotus maksimumo kriterijus.

Kaip pakomentuotumėte abiem variantais gautų rezultatų skirtumą (didesnė produkto kaina antruoju variantu, skirtingi pelnai, etc.) ?

**Užduotis savarankiškam sprendimui.** Išspręskite šį uždavinį, jei

Pirmosios įmonės sąnaudos gamybai yra , antrosios: .

Atsakymą galite pasitikrinti <http://web.vu.lt/ef/t.medaiskis/matematiniai-ekonomines-analizes-metodai-2/>

**Optimizavimas persiklojančių kartų (overlapping generations, OLG) modelyje**.

Modelyje priimama prielaida apie dvi kartas. Laikas diskretus : t = 0,1,2,... Laikotarpyje t viena karta dirba ir turi darbo pajamas, kita gyvena iš santaupų, uždirbtų ankstesniu laikotarpiu.

Laikotarpio t dirbančios kartos asmens vidutinis darbo užmokestis yra wt. Asmuo sprendžia, kiek suvartoti dabar (c1t) ir kiek atidėti senatvei, t.y. t+1 laikotarpiui. Atidėta dalis (wt –c1t) investuojama su palūkanų norma r, todėl laikotarpiu t+1 asmens vartojimas bus

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

Kaip optimizuoti abiejų laikotarpių vartojimą?

Tegu u(.) yra asmens naudingumo funkcija. Tada laikotarpio t vartojimo naudingumas yra u(c1t), o laikotarpio t+1 to pat asmens vartojimo naudingimas yra u[(1+r)(wt –c1t)].

Kadangi naudingumas „šiandien“ ir „rytoj“ yra ne tas pat, tai modelyje dar įvedamas būsimo vartojimo palyginimo su dabartiniu koeficientas, tradiciškai išreiškiamas kaip 1/(1+ρ). Kuo didesnis tas ρ, tuo mažiau asmeniui reikšmingas būsimas vartojimas, lyginant su dabartiniu. Taigi asmuo sprendžia uždavinį

|  |  |
| --- | --- |
| (max)  | (2) |

Nežinomasis čia yra c1t.

Naudingumo funkcija šiame uždavinyje dažniausiai naudojama vadinamoji CRRA (Constant Relative Risk Averse utility function). Jos pavidalas yra

Kai , ši funkcija sutampa su logaritmine. Tolesnių samprotavimų supaprastinimui laikykime, kad taip ir yra, taigi asmuo sprenžia uždavinį

(max)

Maksimizuosime skliaustuose esantį reiškinį pagal c1t ; tam skaičiuosime išvestinę ir prilyginsime ją nuliui:

Atliekame paprastus veiksmus:

Taigi

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

Esant logaritminei naudingumo funkcijai, sprendimas kiek vartoti ir kiek atidėti priklauso tik nuo . *Patikrinkite, ar tai tikrai maksimums ir ar tiesa, kad kuo tas didesnis, tuo didesnė dalis bus suvartojama dabar.*

Nesunku apskaičiuoti ir asmens vartojimą ateityje

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4) |

Būsimo ir esamo vartojimo santykį (pakeitimo normą) nusako dydis

Išnagrinėtoje modelio versijoje priimama prielaida, kad „antroje“ kartoje asmuo gyvena tik iš individualių santaupų. Tačiau realiose senatvės apsaugos sistemose dažniausiai veikia socialinis draudimas, kuris *payg* principu iš dirbančios kartos ima įmokas ir moka pensijas nebedirbančiai kartai. Įtrauksime šį faktą į modelį.

Tegu yra pensijų draudimo įmokų tarifas. Taigi asmuo, uždirbdamas , sumoka pensijų draudimui,o likusią dalį dalina dabartiniam vartojimui ir investavimui

Asmens vartojimas pensijoje dabar bus

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

Čiayra t+1 laikotarpiu asmeniui mokama pensija.

Pensijos dydį lemia pensijų draudimui surenkamų pinigų kiekis ir pensijos gavėjų skaičius. Tegu yra t laikotarpio darbingos kartos skaičius. Tada turėtų galioti balansinė lygtis

nes t+1 laikotarpyje pinigų, išmokamų pensijomis praeitą laikotarpį dirbusiai kartai yra tiek, kiek t+1 laikotarpyje sumoka įmokų šio laikotarpio dirbantieji.

Pažymėję gyventojų augimo tempą , gauname, kad

Taigi dabar

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5a) |

Asmuo dabar maksimizuoja

Vėl skaičiuojame išvestinę pagal

Atliekame veiksmus

|  |  |
| --- | --- |
|  | (6) |

Verta atkreipti dėmesį, kad nesant pensijų draudimo ( formulė (6) sutampa su (3).

Taigi šiuo atveju sprendimas, kiek vartoti, jau priklauso nuo daugelio faktorių: įmokų tarifo, darbo užmokesčio augimo, gyventojų skaičiaus augimo ir investavimo naudos.

Dabar apskaičiuosim vartojimą antruoju – pensijos gavimo – laikotarpiu. Įstatom (6) išraišką į (5a)

Surinkę narius prie ir gauname

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7) |

Ir vėl atkreipkime dėmesį, kad (7) sutampa su (4), kai

Įvertinę vartojimą modelyje su socialiniu pensijų draudimu ir be jo (tik su kaupimu) pamėginkime suprasti, kuriuo atveju vartojimas senatvėje didesnis, t.y. kada (7) išraiškos duodamas rezultatas didesnis už apskaičiuotą išraiškoje (4)? Kada galioja

Suprastinus turi galioti

arba

Taigi būtina sąlyga

|  |  |
| --- | --- |
|  | (8) |

Jei , tai reiškia, kad darbo užmokestis turi augti didesniu tempu, negu vidutinės palūkanos už senatvei taupomus indėlius. Jei , ši sąlyga sušvelninama, nes didėjantis dirbančiųjų skaičius reiškia didesnes pajamas pensijų sistemoje. Priešingu atveju, jei , mažėjantį dirbančiųjų skaičių turėtų kompensuoti darbo užmokesčio augimas.

Atkreipkime dėmesį, kad ši išvada nepriklauso nei nuo , nei nuo , nes jie nefigūruoja (8) nelygybėje.

Dar vienas pastebėjimas: (8) sąlyga garantuoja ir tai, kad vartojimas darbingame laikotarpyje modelyje su socialiniu draudimu didesnis, negu modelyje vien su kaupimu. *Patikrinkite tai.* Paaiškinimas paparastas: nereikia tiek atidėti kaupimui, netgi nepaisant atsiradusios prievolės mokėti pensijų draudimo įmoką.

*Čia buvo pateiktas tik OLG modelio centrinis fragmentas. Toliau šis modelis plėtojamas į gamybos modeliavimą. Ieškantys ras D.Blake knygoje „Pensions economics“ ir daugelyje kitų šaltinių.*

30. n > 1, o aibė apibrėžiama netiesinėmis lygybėmis, kurias užrašysime m funkcijų pagalba. Taigi uždavinys dabar:

(extr)

....

Arba sutrumpintai

(extr)

**.**

Šiam uždaviniui spręsti turime užrašyti vadinamąją Lagrange‘o funkciją

Be jau žinomų kintamųjų, čia įvedama dar m naujų: . Laikome, kad užrašyta matrica eilute, stulpeliu, taigi jų sandaugą galima užrašyti be jokių papildomų ženklų.

Norėdami šį kartą rasti kritinį tašką, skaičiuojame išvestines pagal ir jas prilyginam nuliui.

Taip gauname m+n lygčių su m+n nežinomųjų, kurių sprendinys ir yra kritinis taškas, kurį tikrinsime, minimumas tai ar maksimumas ar nė vienas iš jų.

**Pavyzdys.** Imkime uždavinį su dviem nežinomaisiais ir vienu apribojimu (n= 2, m=1).

(extr)

Užrašome jam Lagrange‘o funkciją.

Skaičiuojame išvestines

Tai trijų lygčių su trimis nežinomaisiais sistema. Ją išsprendę gausime kritinį tašką 8,077; 11,923, p = 0,769. Dabar reikia nustatyti, minimumas tai ar maksimumas.

Tam sudaroma vadinamoji **aprėminta Hesses matrica:**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| **()T** |  |  | ... |  |
|  |  | ... |  |
|  |  |  |  |
|  |  | ... |  |

Matrica sudaryta iš keturių blokų. Kairiajame viršutiniame kampe talpinama m x m dydžio nulinė matrica. „Rėminantys“ blokai yra funkcijų išvestinių m x n matrica: viršuje pati matrica, o kairėje transponuota.

...

Matricos k-tosios eilės pagrindiniu minoru vadinsime determinantą Hk, paimtą iš aprėmintosios matricos kairiojo viršutinio kampo, jei jo apatiniame dešiniajame kampe yra antroji išvestinė pagal .

Mūsų nagrinėtame pavyzdyje m = 1, todėl yra matrica-eilutė (1 1). Skaičiuodami antrąsias išvestines, gausime tokią aprėmintą Hesses matricą:

Minoras H1 yra tas, kurio apatiniame dešiniajame kampe yra antroji išvestinė pagal , pavyzdžio atveju 10. Taigi H1 yra tokios matricos determinantas

H1 reikšmė, kaip matome, yra 0·10 - 1·1 < 0.

Minoras H2 yra tas, kurio apatiniame dešiniajame kampe yra antroji išvestinė pagal , pavyzdžio atveju 4. Taigi H2 yra visos aprėmintos matricos determinantas. Galime apskaičiuoti (kad ir Excel pagalba, funkcija Mdeterm), kad H2 reikšmė yra -26.

O dabar – taisyklė, kaip pagal tuos pagrindinius minorus nustatyti, ar kritinis taškas minimumas ar maksimumas. Primename, kad m yra apribojimų skaičius

**Kritinis taškas yra minimumas tada, kai visi pagrindiniai minorai, pradedant nuo Hm+1 yra (-1)m ženklo.**

Jei turime 1 apribojimą, tai minorai H2, H3 ir t.t. iki paskutinio turi būti (-1)1 ženklo, t.y neigiami. Taip yra mūsų pavyzdžio atveju: H2 neigiamas (-26), daugiau pagrindinių minorų nėra, taigi surastas kritinis taškas minimumas. O minoro H1 reikšmė nesvarbi.

Jei turėtume 2 apribojimus, taisyklė atrodytų taip: tikriname minorus H3, H4 ir t.t., ir visų jų ženklas turi būti (-1)2 , t.y. teigiamas.

**Imkime dar vieną pavyzdį** - uždavinį su trimis nežinomaisiais ir vienu apribojimu (n= 3, m=1).

(extr)

Užrašome jam Lagrange‘o funkciją.

Skaičiuojame išvestines

Išsprendę šią 4 lygčių su 4 nežinomaisiais sistemą, gauname kritinį tašką

Dabar apskaičiuojame aprėmintą Hesses matricą

0 1 1 1

1 2 0 0

1 0 2 0

1 0 0 2

Kadangi m = 1, mums bus reikalingi minorai H2 ir H3 , o minimumui abiejų ženklas turės būti (-1)1 taigi neigiamas. Apskaičiuojame H2

H3 yra visos aprėmintos matricos determinantas. Patikriname, kad jo reikšmė -12, taigi pagal suformuluotą kriterijų mūsų kritinis taškas – minimumas.

**Imkim dar vieną pavyzdį** su dviem apribojimais ir trimis nežinomaisiais (m=2, n=3)

(extr)

Užrašome jam Lagrange‘o funkciją. yra dvimatis, nes m = 2

Skaičiuojame išvestines

Išsprendę šią 5 lygčių su 5 nežinomaisiais sistemą, gauname kritinį tašką

Apskaičiuojame aprėmintą Hesses matricą. Kadangi m=2, viršutiniame kampe 2x2 nulių blokas.

0 0 3 -1 1

0 0 1 1 2

3 1 6 8 0

-1 1 8 12 0

1 2 0 0 2

Kadangi m = 2, mus domina minorai, pradedant nuo H3. Tačiau H3 šiuo atveju ir yra visa aprėmintoji matrica. Todėl skaičiuojame jos determinantą, ir minimumui jis turi būti (-1)2 ženklo, t.y. teigiamas.

Pasitelkę Excel, įsitikiname, kad tikrai jo reikšmė 626 > 0.

Pagrindinių minorų tyrimas taip pat leidžia suformuluoti ir kriterijų maksimumui.

**Kritinis taškas yra maksimumas tada, kai visų pagrindinių minorai, pradedant nuo Hm+1 , ženklai alternuoja, t.y. keičia ženklą, o pats Hm+1  yra priešingo, negu (-1)m ženklo.**

Pavyzdžiui, jei m=2, tai H3 turi būti -(-1)2 ženklo, t.y. neigiamas, H4 teigiamas, H5 vėl neigiamas ir t.t.

**Užduotys savarankiškam sprendimui**

1. Išspręskite ar bent užrašykite reikalingas sąlygas uždaviniui

(extr)

su apribojimu .

2. Išspręskite ar bent užrašykite reikalingas sąlygas uždaviniui

(extr)

su apribojimais .

3. Asmuo iš turimų 16 aktyvumo valandų per parą renkasi, kiek laiko dirbti, o kiek skirti laisvalaikiui. Per darbo valandą jis uždirba w eurų, o laisvalaikio valandos piniginė išraiška yra q eurų. Naudingumo funkcija šiam asmeniui – logaritminė (z eurų uždarbis "vertas" ln(z), atitinkamai "vertas" ir laisvalaikis). Užrašykite ir išspręskite optimizavimo uždavinį, kuriame sumarinis asmens naudingumas, optimaliai paskirsčius darbo ir laisvalaikio laiką, būtų maksimalus. Ar tokį pat rezultatą gausite, jei naudingumo funkcija bus ne logaritminė, o CRRA: z(1-θ) /(1-θ) ?