**2 tema. Skirtuminės lygtys**

Ekonominėje analizėje neretai prireikia suprasti, paaiškinti ir prognozuoti vienokius ar kitokius laike vykstančius procesus, pavyzdžiui, kainų dinamiką, ekonominių ciklų prigimtį ir pan. Nagrinėti minėtus procesus galima diskrečiame arba tolydžiame laike. Analizei sėkmingai taikomi tiek tolydaus, tiek ir diskretaus laiko modeliai. Tačiau tam tikrais aspektais ekonominiams procesams nagrinėti diskretus laikas atrodo priimtinesnis. Juk daugelį ekonominių parametrų matuojame ne sekundės ar dar didesniu tikslumu (tą daro gamtos mokslai, fizika), bet metų, ketvirčių, mėnesių ir panašiu tikslumu. Juk neklausiame, koks šią sekundę BVP, klausiame koks jis buvo praeitą ketvirtį ar per praėjusius metus. Net ir tokie lyg ir momentiniai dydžiai kaip kaina irgi nustatomi tam tikrai datai. Todėl nagrinėjimą pradėsime nuo diskretaus laiko (t = 0,1,2,...) modelių, o mūsų nagrinėjamo objekto būseną (skaitinę reikšmę) fiksuosime tais momentais: Mus domins, kaip vystysis procesas laike, jei esame ištyrinėję (kad ir ekonometrikos ar kitais metodais), kaip susijusios pirmos stebėtos reikšmės

Tuo tikslu naudosime *skirtumines lygtis (difference equations).* Vėliau aptarsime ir analogiškas tolydaus laiko procesų analizes priemones – *diferencialines lygtis (differential equations)*.

Skirtumine lygtimi vadiname bet kokią reikšmes visiems *t* siejančią funkciją

Pradinės reikšmės ir seka laikomos žinomomis; išreiškia egzogenines mūsų tyrinėjamą procesą įtakojančias sąlygas. Tokią lygtį bendru pavidalu tyrinėti būtų nelengva. Todėl pradėkim nuo paprasčiausio tiesinio atvejo.

Tiesine skirtumine *k*-tosios eilės lygtimi vadiname lygtį

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

Pradinės reikšmės ir seka laikomos žinomomis.

Jei , lygtis vadinama *homogenine*.

Homogeninės lygties sprendinys labai svarbus visos tiesinės lygties sprendimui ir štai kodėl. Tegu yra koks nors atskiras (kokį pavyko rasti) (1) lygties sprendinys, paprastai vadinamas daliniu integralu *(particular integral):*

Panariui atėmę šią lygybę iš (1) lygties, gausime

Vadinasi, skirtumas yra homogeninės lygties sprendinys (*complementary function)*. Arba, kitaip tariant**, bendras sprendinys yra homogeninės lygties sprendinio ir dalinio integralo suma.** Todėl išspęsti lygtį reiškia surasti homogeninės lygties sprendinį ir prie jo pridėti dalinį integralą. Štai kodėl pradėsime nuo homogeninių lygčių analizės.

**10. Pirmos eilės tiesinė skirtuminė lygtis**

Pradėsime nuo pirmos eilės homogeninės lygties sprendimo. Kaip aišku iš bendro apibrėžimo, tai lygtis

|  |  |
| --- | --- |
|  | (2) |

Pradinė reikšmėlaikoma žinoma.

Ieškosime sprendinio, kurio pavidalas . Įstatome šį reiškinį į lygtį:

Prastindami iš gauname charakteringąją lygtį

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3) |

Lengvai randame, kad , o rasime iš pradinės sąlygos .

*Pavyzdys*: Sprendinys: .

Dabar spręsime paprasčiausią nehomogeninį variantą

Žinome, kad mums reikia rasti kokį nors dalinį integralą. Spėkime, kad tai bus visoms t reikšmėms. Jei taip, tai turi būti

Matome, kad Belieka pridėti šį dalinį integralą prie mums jau žinomo homogeninės lygties sprendinio, ir gauname bendrą sprendinį

|  |  |
| --- | --- |
| (jei | (4) |

Jei būtų , toks sprendinys netiktų. Tada darom kitokį dalinio integralo spėjimą būtent Vėl įstatom šį spėjimą į pradinę lygtį

Dabar matome, kad ir dalinis integralas turi būti . Belieka jį pridėti prie homogeninės lygties sprendinio

(jei

Kadangi šiuo atveju =1, tai sprendinys šiuo atveju

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5) |

***Pavyzdys*:** lygtis Sprendinys: , . Konstantą rasime iš pradinės sąlygos . Todėl ir galutinis sprendinys

***Pavyzdys*:** lygtis Šiuo atveju , todėl sprendinys . Konstantą rasime iš pradinės sąlygos: . Galutinis sprendinys: .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Kad ir kokia paprasta būtų pirmos eilės tiesinė skirtuminė lygtis, atkreipkime dėmesį, kad netgi tokia lygtis gali generuoti nemažą procesų įvairovę.

arba

*Pabandymui:*

***Taikymo pavyzdys.*** Norime diskrečiame laike tyrinėti tam tikro produkto paklausos , pasiūlos ir kainų  dinamiką. Užrašome priklausomybes

(paklausa mažėja, kainai didėjant, - priklausomybę nusakantys parametrai).

(pasiūla didėja, kainai didėjant, - priklausomybę nusakantys parametrai).

(kaina kitame laikotarpyje mažėja, jei pasiūla viršija paklausą, yra parametras, įvertinantis paklausos-pasiūlos skirtumo poveikį kainai).

Iš šių trijų lygčių eliminuodami ir , gauname pirmos eilės skirtuminę lygtį dėl :

Šioje lygtyje , Kadangi , sprendinys yra (4) pavidalo, o kainų dinamiką lemia charakteringosios lygties šaknis

Matome, kad , bet, kaip jau žinome iš bendrų pavyzdžių, kainų dinamika bus skirtinga, jei bus 0 , , ar net .

Dydis , kol . Šiuo atveju turėsim tolygiai eksponentiškai mažėjančias (ar didėjančias) kainas , konverguojančius į reikšmę .

Jei taip atsitiktų, kad , tada būtų ir kaina išliktų visąlaik pastovi.

Jei , o tai reiškia, kad , turėsim gęstančius kainos svyravimus, konverguojančius į jau minėtą dydį.

Ir tik tuo atveju, jei reikšmė „pernelyg didelė“, t.y. , kainų dinamika būtų tokia, kad jokios realistiškos kainų trajektorijos šis modelis nerodytų.

**20. Antros eilės tiesinė skirtuminė lygtis**

**2.10  Homogeninė lygtis.** Spręsime antros eiles homogeninę skirtuminę lygtį:

; pradinės reikšmės žinomos.

Kaip ir pirmos eilės lygties atveju, ieškosim sprendinio pavidalu . Įstatome šį reiškinį į lygtį

Suprastinę iš gauname charakteringąją lygtį

Kitaip nei pirmos eilės atveju ši lygtis turi dvi šaknis ir . Šios šaknys gali būti realios ir skirtingos, tačiau gali būti ir realios sutampančios (kartotinė šakinis), o gali būti ir kompleksinės sujungtinės. Pradėsime nuo paprasčiausio atvejo.

***2.1.10  Realios skirtingos šaknys***. Akivaizdu, kad tiek  **,** tiek irtenkina sprendžiamą lygtį, todėl skirtuminės lygties sprendinį išreiškiame formule

.

Koeficientus ir nustatysime iš pradinių sąlygų.

***Pavyzdys.*** Išspręsti skirtuminę lygtį

Randam charakteringosios lygties

šaknis ir . Todėl lygties sprendinys

.

Dydžius ir nustatysim pagal žinomas pradines reikšmes:

.

.

Todėl . Lygties sprendinys:

.

***Pavyzdys.*** Fibonazzi skaičiai

Yra tokia įžymi skaičių seka: 1 1 2 3 5 8 13...

Turbūt jau aišku, kad , o tai yra lygties

sprendinys.

Rasime bendrą sekos išraišką. Užrašome charakteringąją lygtį

Jos šaknys – skirtingos realios, todėl sprendinys

.

Koeficientų reikšmes nustatysime iš pradinių sąlygų

.

Atlikę veiksmus gausime

.

Atkreipkime dėmesį į gana nuostabų dalyką: nors kiekvienos reikšmės apskaičiavimuose figūruoja iracionalūs skaičiai , rezultatas visada sveikaskaitinis.

***2.1.20  Sutampančios šaknys (kartotinė charakteringosios lygties šaknis****).* Gali atsitikti, kad charakteringosios lygties diskriminantas lygus nuliui: . Tada lygtis turi dvi sutampančias šaknis .

Įsitikinsim, kad šiuo atveju ne tik yra skirtuminės lygties sprendinys, bet ir . Įstatom paskutiniąją išraišką į lygtį

Suprastinę iš ir pertvarkę gauname:

Matome, kad abu laužtiniuose skliaustuose esantys reiškiniai lygūs nuliui visoms t reikšmėms: pirmasis dėl to, kad yra charakteringosios lygties šaknis, o antrasis dėl to, kad . Vadinasi tikrai yra mūsų lygties sprendinys, o bendras sprendinys yra

Koeficientus ir kaip ir anksčiau nustatysime iš pradinių sąlygų.

***Pavyzdys.*** Išspręsti skirtuminę lygtį

Ieškom charakteringosios lygties

šaknų. Kadangi lygtis šiuo atveju turi dvi sutampančias šaknis , lygties sprendinys

.

Dydžius ir nustatysim pagal žinomas pradines reikšmes:

.

.

Todėl . Lygties sprendinys:

**1**

Skaičius a+bi dar kitaip gali būti užrašytas, panaudojant jo modulį ir kampą ϕ. Kaip matome iš brėžinio, a = R·cos(ϕ), b = R·sin(ϕ), o visas skaičius

ϕ

R

b

a

**Intarpas: Apie kompleksinius skaičius - kas mokykloj nesimokė...**

Kompleksiniai skaičiai sudaromi, panaudojant menamą vienetą – kvadratinę šaknį iš -1. Jis visada žymimas . Atrodytų, kam toks „nesantis“ dydis reikalingas. Tačiau netrukus pamatysim, kad netgi labai pasitarnauja daugelio dalykų, taip pat ir skirtuminių lygčių sprendimui.

Kompleksiniu skaičiumi vadinsime , čia – realūs skaičiai. Su kompleksiniais skaičiais galima atlikti įprastus sudėties, atimties, daugybos ir kitus veiksmus, nepamirštant, kad

Pavyzdžiui, (3+2i)+(4-i) = 7+i; (3+2i)·(4-i)=12-3i+8i-2i·i =14+5i (nes -2i·i=2).

Kompleksinį skaičių patogu atvaizduoti grafiškai panašiai kaip dvimatį vektorių.

Dar vienas svarbus kompleksinio skaičiaus užrašymo būdas – eksponentinės funkcijos panaudojimas. Iš tikrųjų, jei pasižiūrėsime į išraiškos skleidimą eilute, pamatysime

Pertvarkius

Atsižvelgę, kad ir t.t., matome, jog mūsų eilutę sudaro ir skleidimai eilute. Todėl

Ši formulė leidžia lengvai pakelti kompleksinį skaičių norimu laipsniu:

***2.1.30  Kompleksinės sujungtinės šaknys****.* Gali atsitikti, kad charakteringoji lygtis realių šaknų neturi. Tada ji turi dvi kompleksines sujungtines šaknis

Lygties sprendinį dabar užrašome kaip ir anksčiau

.

Atsižvelgę į jau išnagrinėtus veiksmus su kompleksiniais skaičiais gauname:

Pažymėję , , gauname sprendinį

.

Koeficientus ir kaip ir anksčiau nustatysime iš pradinių sąlygų, bet dar reikia išsiaiškinti, kaip apskaičiuoti ir Juk sąlygoje mums duoti dydžiai , o sprendinį išreiškėme per ir

Kadangi ir charakteringosios lygties šaknys, tai pagal Vijeto teoremą jų sandauga lygi

Todėl . Pagal apibrėžimą yra realus skaičius, todėl turime įsitikinti, kad

Atsiminkime, kad kvadratinės lygties šaknys kompleksinės, kai diskriminantas . Padalinę iš gauname Todėl ir realus.

Kitas Vijeto teoremos teiginys sako, kad ir suma lygi . Todėl

Kadangi išraišką jau žinome, nesunkiai s rasime

.

)

Dar turime įsitikinti, kad , nes tai turi būti ieškomo kampo kosinusas. Suskaičiavę gauname, kad turi būti . Taip ir yra, nes diskriminantas.

***Pavyzdys.*** Išspręsti skirtuminę lygtį

Charakteringoji lygtis:

Kadangi lygties diskriminanatas (-2)(-2)-4∙4∙1 < 0 neigiamas, skirtuminės lygties sprendinio ieškosim pavidalu

.

Randam = 0,5; . Todėl

.

Dydžius ir nustatysim pagal žinomas pradines reikšmes:

.

.

Iš čia . Lygties sprendinys:

.

**2**

**2.20  Nehomogeninė lygtis.**

Iki šiol sprendėme homogenines lygtis, t.y. tokias, kurių laisvasis narys buvo lygus nuliui. Tačiau neretai tenka spręsti ir tokias lygtis, kur taip nėra. Kaip minėjome pradžioje, laisvasis narys gali būt egzogeniškai užduota seka . Priklausomai nuo jos pavidalo keisis ir lygties sprendinys. Nagrinėkim paprasčiausiai įveikiamą atvejį, kai , t.y. eksponentiškai kečiasi su laiku. Jei mums reikės, kad būtų , kitaip tariant, lasvasis narys būtų konstanta, bendrose formulėse paprasčiausiai galėsime paimti .

Taigi sprendžiame lygtį

**;** pradinės reikšmės žinomos.

***2.2.10 Atvejis***  Panašiai kaip ir pirmos eilės lygties atveju ieškokim dalinio integralo, pasinaudodami tokiu spėjimu:

Įstatom į pradinę lygtį, kad įsitikintume dėl spėjimo ir rastume reikšmę

;

Pertvarkom

;

Pasirenkame ir matome, kad dalinis integralas

.

Belieka jį pridėti prie homogeninės lygties sprendinio.

***Pavyzdys*** *.*Grįžkime prie pirmojo pavyzdžio, bet dabar formuluokime jau nehomogeninę užduotį – išspręsti lygtį

Šiuo atveju . Homogeninio varianto sprendinį jai turime, belieka užrašyti

.

Koeficientų reikšmes reikės nustatyti iš naujo

.

.

Apskaičiavę gausime

.

Šį procesą atitinka toks grafikas

Jei būtų , taigi lygtis pagal išvestas formules gautume

dalinį integralą . Sprendinys tada

.

Koeficientus ir reikėtų nustatyti iš naujo.

***Pavyzdys*** *.*Grįžkime prie trečiojo pavyzdžio, bet dabar formuluokime jau nehomogeninę užduotį – išspręsti lygtį

Dabar todėl prie homogeninio sprendinio

.

teks pridėti narį

= .

Todėl sprendinys bus

.

Iš pradinių sąlygų rasime koeficientus

.

.

Gaunam todėl sprendinys

.

**4**

***2.2.20 Atvejis* .** Atlikdami ankstesnius veiksmus, mes laikėme, kad nėra charakteringosios lygties šaknis. Tačiau jei taip atsitiktų, samprotauti kaip anksčiau negalėtume, nes negalėtume paimti

Todėl tuo atveju, kai vis dėlto yra charakteringosios lygties šaknis, ieškokim kitokio pavidalo dalinio integralo

Vėl tikrinam šį spėjimą ir ieškom reikšmės

;

Pertvarkę gausime

;

Kadangi dabar užteks paimti (jei )

ir mūsų dalinis integralas bus

Prie homogeninės lygties sprendinio

.

užteks pridėti narį ir turėsime bendrą sprendinį

+

Atkreipkime dėmesį, kad šiuo atveju iš karto vietoje rašome , kadangi tai viena iš charakteringosios lygties šaknų (bet nekartotinė).

***Pavyzdys .*** Vėl grįžkime prie pirmojo pavyzdžio, bet dabar formuluokime jau nehomogeninę užduotį, atitinkančią mūsų išnagrinėtą atvejį – išspręsti lygtį

Šiuo atveju . Homogeninio varianto sprendinį jai turime, bet dabar yra charakteringosios lygties šaknis, todėl dabar

.

Koeficientų reikšmes reikės nustatyti iš naujo

.

.

Apskaičiavę gausime

..

**5**

***2.2.30 Atvejis*** Šiuo atveju negalime pasirinkti, kad , nes vardiklis būtų lygus nuliui. Todėl atvejį turime nagrinėti specialiai.

Užrašytos sąlygos reiškia, kad yra ne tik charakteringosios lygties šaknis, bet ji dar ir kartotinė šaknis.

Iš tikrųjų, pagal šaknies skaičiavimo formulę turime

Matome, kad . Vadinasi, diskriminanatas lygus nuliui, ir šaknis kartotinė.

Todėl dalinio integralo ieškosime pavidalu

Ir vėl įstatysim šią išraišką į pradinę skirtuminę lygtį

;

Atliekame veiksmus ir sugrupuojame narius

;

Pirmas ir antras dėmuo šio atveju lygūs nuliui, todėl

;

Atkreipkim dėmesį, kad

Todėl pagaliau

;

Dabar galime pasirinkti ( pagal sąlygą)

Ir mūsų dalinis integralas bus

Pradinės lygties bendras sprendinys (atsiminus, kad yra kartotinė šaknis) bus

***Pavyzdys.*** Išspręsti skirtuminę lygtį, kurią jau sprendėm, bet dabar nebe homogeninę

Jau žinome, kad yra kartotinė charakteringosios lygties šaknis, be to, pagal sąlygą dar ir – sutampa su šia šaknimi. Todėl sprendinys bus

.

Dydžius ir nustatysim pagal žinomas pradines reikšmes:

.

Todėl . Lygties sprendinys:

Atkreipkime dėmesį, kad anaiptol nebūtinai turi sutapti su kartotine šaknimi. Tada taikome bendrą formulę.

***Pavyzdys.*** Išspręsti skirtuminę lygtį

Šiuo atveju  *=1, b=1.* Homogeninio atvejo sprendinį jau žinome. Todėl

.

arba

.

Iš naujo nustatome dydžius ir .

.

Gauname Todėl

**.**

**Suvestinė atvejų lentelė**

Lygtis

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Homogeninės sprendinys | Dalinis integralas, kai laisvasis narys |
| Nėra realių šaknų | . | . |
| Dvi skirtingos realios šaknys | . | jei |
| Kartotinė šaknis |  | jei |

**2.30  Nehomogeninė lygtis.** **Neapibrėžtiniai koeficientai**

Iki šiol nagrinėjome atvejį, kai . Tačiau gali būti ir neeksponentinis.Tokiu atveju galima ieškoti dalinio integralo panašiu būdu, kaip darėme iki šiol. O kaip darėme? Ogi ieškojome dalinio integralo, kurio pavidalas būtų arba arba , kur buvo ieškomas dydis, toks *neapibrėžtinis koeficientas,* kurį identifikavome tolesniais skaičiavimais. Panašiai pavyksta pasielgti ir kitais atvejais

**2.3.10 Tiesinis laisvasis narys.** Paprasčiausias pavyzdys būtų – tiesinis laisvasis narys . Tada ir dalinio integralo ieškotume pavidalu . Galima šį veiksmą atlikti algebraiškai, bet bandykim iš karto su konkrečiais skaičiais (juo labiau, kad sprendžiant konkrečią lygtį kitą kartą patogiau atlikti veiksmus, negu įstatinėti reikšmes į kažkur nukištas formules).

***Pavyzdys.*** Išspręskime lygtį

; pradinės reikšmės .

Homogeninio varianto charakteringoji lygtis: . Jos šaknys -1/2 ir 1/5, todėl homogeninės lygties sprendinys

Ieškom dalinio integralo

Įstatom į lygtį

;

Surenkam narius prie t ir konstantą

;

Kadangi lygybė turi galioti visiems t,

Gauname todėl , o visas sprendinys

Belieka rasti konstantas

Nesunkiai randame . Todėl bendras sprendinys

Kaip ir anksčiau, jei nepavyktų išspręsti, bandytume .

**6**

**7**

Nesunku gauti ir bendras algebrines išraiškas lygčiai .

**2.3.20 Laisvasis narys - polinomas.** Panašiai galima elgtis ir kai yra aukštesnio laipsnio polinomas

Dalinio integralo ieškome pavidalu

įstatome į lygtį ir apskaičiuojame neapibrėžtinius koeficientus.

***Pavyzdys:*** Lygtis

Charakteringos lygties šaknys yra -1/2 ir -1.

Ieškome dalinio integralo

Atlikę veiksmus ir surinkę narius prie t laipsnių, pirmus du prilyginę 0, likusį 5, gausime

Todėl sprendinys bus

**8** Lygtis

Panašiai galima elgtis ir kai turime ankstesnių atvejų „mišinį“ pvz.,: . Šiuo atveju galima išspręsti lygtį atskiriems dėmenims ir atskirai. Sakykim, sprendžiama lygtis

Jei radome dalinius integralus

tai suma ir bus ieškomas dalinis integralas.

**30. Taikymo pavyzdys: Samuelsono modelis**

Nagrinėjame šalies ūkio funkcionavimą diskrečiame laike t = 0,1,2,.... Bendrąjį produktą skirstome į namų ūkių vartojimą , investicijas ir vyriausybės išlaidas :

Laikome, kad namų ūkių vartojimas sudaro pastovią bendrojo produkto dalį , apskaičiuojamą su vieno laikotarpio vėlavimu

Be to, pagal Keynesą laikome, kad investicijų dydį lemia vartojimo augimas:

,

čia vadinamasis Keyneso akceleratorius.

Eliminuodami ir iš šių trijų lygčių gauname tokią skirtuminę lygtį:

Preziumuodami eksponentinį vyriausybės išlaidų augimą , žinome, kad prie atitinkamos homogeninės lygties sprendinio reikės pridėti dėmenį

,

o homogeninės lygties sprendinį nulems charakteringosios lygties

šaknys. Nagrinėsime šias šaknis, norėdami išsiaiškinti, kokią dinamiką jos lemia.

Pirmiausia nustatykime sąlygą, kada šaknys realios, o kada kompleksinės. Tai, kaip žinome, lemia charakteringosios lygties diskriminantas

Šaknys yra realios, jei, o taip yra, kai

**Realių šaknų atvejis.** Iš Vijeto teoremos žinome, kad

Matome, kad abi šaknys yra vienodo ženklo, nes jų sandauga . Be to, jos abi teigiamos, nes jų suma . Negana to, abi šaknys yra arba didesnės arba mažesnės už vienetą. Tuo įsitikiname, suskaičiavę

Kadangi matome, kad tai dydžiai ir abu teigiami arba abu neigiami, o tai ir reiškia, kad abi šaknys yra arba didesnės arba mažesnės už vienetą.

Kadangi , tai dydis ir lemia, ar abi šaknys mažesnės, ar abi šaknys didesnės už 1. Jeigu , tai abi šaknys yra mažesnės už vienetą; priešingu atveju – abi didesnės. (Atvejis reikštų, kad abi šaknys lygios vienetui, bet realių šaknų atveju tai įmanoma tik kai . Tačiau pačioje pradžioje priėmėm prielaidą, kad .

Apibendrinant, realių šaknų atveju modeliuojama ekonominė dinamika bus aprašoma lygtimi

,

priklausomai nuo reikšmės arba artės į eksponentės lemiamą augimą (kai arba tai bus trijų eksponentinių augimų sąveika (kai ).

**Kompleksinių šaknų atvejis.** Šaknys bus kompleksinės sujungtinės, jei

Tada mūsų sprendinys, kaip žinome, atrodys taip:

.

Čia . Taigi matome, kad ir vėl visą proceso dinamiką remia dydis. Jei tai osciliuojanti proceso dalis, didėjant t, nunyksta ir viską lemia likęs narys; priešingu atveju procesą lemia svyruojanti (ekonominio ciklo) dalis ir eksponentinio augimo dalis.

Šiuos rezultatus vaizduoja vadinamasis “Samuelsono osciliatorius”

D

C

B

A

Mėlyna linija vaizduoja kreivę , o oranžinė kreivę . Taip visas grafikas suskirs­tomas į 4 sritis pagal parametrų reikšmes, lemiančias charakteringosios lygties šaknis..

A: Šaknys realios ir abi mažesnės už 1. B: Šaknys realios ir abi didesnės už 1.

C: Šaknys kompleksinės, R<1. D: : Šaknys kompleksinės, R>1

**40. Aukštesnės eilės tiesinės skirtuminės lygtys ir lygčių sistemos.**

**4.10 Vienmatis kintamasis**. k-tosios eilės skirtumine lygtimi pavadinome lygtį:

Ją sprendžiame panašiai kaip ir pirmos ar antros eilės skirtumines lygtis: pirmiausia sudarome charakteringąją lygtį

Ši lygtis turi k šaknų, kurios gali būti realios (kartotinės ar ne), taip pat kompleksinės sujungtinės. Panašiai kaip ir antrosios eilės lygties atveju, homogeninės lygties sprendinį sudarys charakterin­gosios lygties šaknis atitinkantys dėmenys:

ir panašiai. Nehomogeninės lygties sprendinys irgi būtų randamas panašiu būdu, kaip ir mūsų jau nagrinėtas.

***Pavyzdys****.* Spręskime trečios eilės lygtį

Užrašome charakteringąją lygtį

Kubinės lygties sprendimas nėra toks paprastas kaip kvadratinės, bet šiuo atveju pastebėkime, kad šią lygtį galima užrašyti taip:

Iš čia matome, kad lygtis turi tris šaknis: realią ir dvi kompleksines

Homogeninės lygties sprendinys bus

.

Dėl pirmojo dėmens aišku, bet ką daryti su kitais dviem? Naudosimės kompleksinio kintamojo žiniomis. Užrašysime

Todėl

Panašiai

naudojamės tuo, kad cos – lyginė, o sin - nelyginė funkcija. Dabar mūsų sprendinys

Surinkę panašius narius ir pažymėję gauname

Tai homogeninės lygties sprendinys. Norint rasti bendrą nehomogeninį sprendinį, reikia rasti dalinį integralą. Ieškosime pavidalo. Turėtų būti

Taigi ir bendras sprendinys

***Pavyzdys.***Išspręsti trečios eilės lygtį

Sprendinys

**Svarbi pastaba apie sprendinio konvergavimą.** Daugeliu atvejų svarbu, ar konverguoja į kokią pastovią reikšmę ar trajektoriją. Tai lemia charakteringosios lygties šaknys. Jos visos moduliu mažesnės už vienetą, tada ir tik tada, kai teigiami visi *k* tam tikri iš šių koeficientų sudaryti determinanatai, nurodomi garsioje **Schuro teoremoje.** Trimačiu atveju determinantai tokie

***Pavyzdys*** Ar konverguos ir į ką lygties

18

sprendinys?

Patikrinę Schuro determinantus, įsitikiname, kad jie teigiami. Todėl sprendinys konverguos į dalinį integralą. Ieškosime pavidalo. Turėtų būti

Taigi ir bendras sprendinys konverguoja į 2.

**4.20 Daugiamatis kintamasis**. Gali būti (pavyzdžiui, dinaminiuose *input-output* modeliuose), kad mūsų kintamasis yra n-matis vektorius . Imkime paprasčiausią galimą skirtuminės lygties tokiu atveju variantą:

Čia yra n x n kvadratinė matrica. Šią lygtį galime įsivaizduoti ir kaip n tiesinių lygčių sistemą.

Ieškosime sprendinio pavidalu **.** Įstatę į sprendžiamą lygtį, gauname

arba **.** Kitaip tariant, norėdami rasti užsibrėžto pavidalo sprendinį, turime rasti matricos tikrinę reikšmę ir tikrinį vektorių. Kaip žinome, tam turime rasti tokius kurie tenkintų lygtį Determinantas kaip funkcija nuo yra n eilės polinomas (tuo pačiu ir mūsų sprendžiamos lygties charakteringoji lygtis). Bendru atveju ir vėl turėsime n šios lygties šaknų (jos gali būti realios, kartotinės, kompleksinės) ir jas atitinkančius tikrinius vektorius Kitaip tariant,

Bendras mūsų skirtuminės lygties sprendinys bus

Čia - konstantos, parenkamos iš pradinių sąlygų. Įsitikinsime, kad toks tikrai tenkina lygtį:

***Nehomogeninis atvejis.*** Tegu turime lygtį

Pastebėkime, kad

yra dalinis integralas. Laikome, kad egzistuoja ir įrodome šį spėjimą. Įstatome į lygtį

Taigi dalinis integralas tenkina lygtį ir belieka jį pridėti prie homogeninio sprendinio. Taigi nehomogeninės lygties sprendinys

***Pavyzdys***. Spręsim tiesinių skirtuminių lygčių sistemą su dvimačiu nežinomuoju.

Apskaičiuosim matricos tikrines reikšmes. Tam apskaičiuojam polinomą

Randame dvi realias nekartotines šaknis

Dabar reikia rasti šias šaknis atitinkančius tikrinius vektorius iš lygčių

Kai

Kai

Dabar jau galime užrašyti sprendinį

Iš pradinės sąlygos (t = 0) randame

Nesunkiai apskaičiavę ir gauname galutinį sprendinį