**1 tema. Matricų teorijos elementai ir sąnaudų-produkcijos modelis**

**10 Sąnaudų-produkcijos (*input-output*) modelio esmė**

Modelis, kurį čia naudosime kaip priemonę susipažinti su sudėtingesnėmis matricų algebros temomis, buvo sukurtas rusų kilmės amerikiečių mokslininko Vasilijaus Leontjevo dar 1932 metais, publikuotas 1936 metai, o po 40 metų jo autorius atžymėtas Nobelio premija.

Šalies ūkis sąnaudų-produkcijos ( *input-output)* modelyje suprantamas kaip n „šakų“ visuma. Kiekviena šaka gamina vieną produktą, naudodama kitų šakų gaminamus produktus.

Žymėsim i-tosios šakos produkcijos kiekį, sunaudojamą j-tosios šakos gamyboje (paprastai matuojame pinigais, nors sudaromi ir vadinami „natūriniai“ modeliai). Pavyzdžiui, jei i-toji šaka – elektros energijos gamyba, o j-toji – automobilių pramonė, reikštų, kad automobilių gamyboje sunaudota elektros energijos už 100 mln. eurų.

Modelis statiškas, užsidarantis metų rėmuose (niekas neateina iš ankstesnių metų ir nepereina į kitus).

Taigi pagrindinė šalies ūkį atvaizduojanti lygtis yra

(1)

Čia yra bendra i-tosios šakos produkcija, suma parodo, kiek jos skiriama visoms kitoms šakoms, įskaitant ir pačią i (tarpinis produktas, *interim demand*), o – galutinis produktas (*final demand*), t.y. kiek skiriama vartojimui (namų ūkiams, vyriausybės reikmėms ir t.t.)

[Data - ESA Supply, use and Input-output tables - Eurostat (europa.eu)](https://ec.europa.eu/eurostat/web/esa-supply-use-input-tables/data)

[www.wiod.org](http://www.wiod.org)

Toliau priimama esminė šio modelio prielaida, kad dydis yra tiesiog proporcingas j šakos gamybos apimčiai (kuo didesnė šakos gamyba, tuo proporcingai daugiau jai reikia elektros, metalo ir t.t.) Proporcingumo koeficientą pažymėję , gauname

(2)

Šios prielaidos dėka (1) lygtis tampa

(3)

Prieš pereidami prie tolesnio nagrinėjimo, atkreipkime dėmesį į prielaidos ribotumą. Tiesinis homogeniškas proporcingumas neatsižvelgia į jokią galimą masto ekonomiją. Taip pat ignoruojama faktorių pakeičiamumo galimybė: kurios nors šakos gamybai didėjant 1%, atitinkamai 1% didėja reikalingos visų kitų šakų produkcijos sąnaudos be galimybės pakeisti vienus išteklius kitais.

Lygtis (3) gali būti kompaktiškiau užrašyta, visus koeficientus ir kintamuosius suvedant į matricą: (), , bei vektorius

(4)

Panaudoję užrašymą matricomis, turime atnaujinti pagrindines žinias apie matricas, taip pat ir išsiaiškinti kai ką papildomai.

**20. Matricų teorijos elementai.**

*Matrica* vadinsime skaičių lentelę, kuri bendru atveju turi *m* eilučių ir *n* stulpelių. Matricas žymėsime didžiosiomis raidėmis, o jų elementus – mažosiomis. Galime užrašyti, pavyzdžiui, tokią dimensijos matricą

Skaičiai ( vadinami matricos elementais (žymėjimas reiškia, kad indeksas įgyja reikšmes 1,2,.... Neretai elemento indeksai, nurodantys matricos eilutę ir stulpelį, abu užrašomi apačioje kaip , bet mes naudosime aukščiau parodytą žymėjimą, kuris, kaip matysime patogesnis, ypač kai reikės atskirai nagrinėti matricos eilutę ar stulpelį.

Matricą (kaip jau ir padarėme) galima žymėti ir trumpiau: (), ,

Jei *m* = *n,* matrica vadinama *kvadratine.*

Mums reikės dar kai kurių žymėjimų. Kadangi analizei naudosime matricos eilutes ir stulpelius, patogu matricos i-tąją eilutę pažymėti ; panašiai j-tąjį stulpelį pažymėsime .

Į vektorius daugeliu atveju patogu žiūrėti kaip į matricas, turinčias vieną eilutę arba vieną stulpelį. Iš tikrųjų, gali būti suprantamas ne tik kaip vektorius, bet ir kaip dimensijos matrica. Jei jo koordinates surašysime stulpeliu, tai turėsime n eilučių ir vieno stulpelio matricą, kurios dimensija . Tokį vektorių vadinsime *vektoriumi-stulpeliu* ir susitarsime, kad toliau, jei nebus specialiai pasakyta kitaip, visus vektorius ir t.t. laikysime vektoriais-stulpeliais. Nulių vektorių stulpelį pažymėsime , vienetų vektorių stulpelį pažymėsime .

Matricų transponavimu vadinsime eilučių sukeitimą su stulpeliais ir žymėsim viršutiniu indeksu T. Jau naudojome šį žymėjimą vektoriui norėdami pasakyti, kad yra vektorius-stulpelis, nors užrašytas eilute. Užrašymas reiškia, kad dimensijos matricą paverčiame dimensijos matrica.

*Vienetine* vadinsime kvadratinę dimensijos matricą, kurios visi elementai nuliai, išskyrus vienetus pagrindinėje diagonalėje. Žymėsime ją

Literatūroje vienetinė matrica dažniausiai žymima raide , bet mes naudosime nurodytą žymėjimą, kadangi jis leidžia kompaktiškai žymėti vienetinės matricos eilutes ir stulpelius .

Matricas, kaip ir vektorius, galima dauginti iš skaliaro bei sudėti. Daugindami matricą iš skaliaro, iš jo dauginame visus matricos elementus. Sudėti galima tik vienodų dimensijų matricas. Šiuo atveju abiejų matricų elementus sudedame panariui ir vėl gauname tos pačios dimensijos matricą.

Svarbus veiksmas su matricomis – jų daugyba. Matricas ir galima sudauginti, jei matrica turi tiek pat stulpelių, kiek matrica eilučių. Sakykim, matrica turi m eilučių ir k stulpelių (jos dimensija ), o matrica turi k eilučių ir n stulpelių (jos dimensija ). Tada yra matrica, kuri turi m eilučių ir n stulpelių (jos dimensija ). Atkreipkime dėmesį, kad atvirkštine tvarka šių matricų nebus galima sudauginti, nebent m būtų lygus n. Jei pažymėsime tai sandaugos elementas bus lygus matricos i-tosios eilutės elementų, panariui padaugintų iš matricos j-tojo stulpelio elementų sumai. Galime tą patį užrašyti keliais būdais:

Vektoriai-stulpeliai, taip pat ir vektoriai-eilutės gali būti dauginami iš matricų. Sakykim, matricą () galima padauginti iš vektoriaus stulpelio (). Sandauga bus vektorius-stulpelis (). Ši sandauga apskaičiuojama pagal bendras taisykles:

MMULT

Vienetinė matrica dėl to ir vadinama vienetine, kad jos sandauga su bet kokia matrica (iš kurios galima padauginti) lygi tai matricai. Nesunku įsitikinti, kad kvadratinei dimensijos matricai galioja

Kvadratinė matrica vadinama *atvirkštine* kvadratinei matricai , jei Nesunku įsitikinti, kad šiuo atveju ir Atvirkštinė matrica žymima . Algebros teorijoje įrodoma, kad atvirkštinė matrica egzistuoja tada ir tik tada, kai pradinės matricos determinantas nelygus nuliui:

MDETERM MINVERSE

Nelygybes tarp vienodos dimensijos matricų ar vektorių suprasime panariui: reiškia, kad abi matricos vienodos dimensijos, ir visi elementai ne mažesni už atitinkamus elementus. Analogiškai žymėjimas reikš, kad visi elementai neneigiami.

Matricos *norma* vadinsime dydį (t.y. didžiausią iš stulpelių absoliučių dydžių sumų). Atkreipkime dėmesį, kad tik tada, kai , t.y. visi matricos elementai lygūs nuliui. Be to, norma apibrėžiama taip, kad .

Dar mums reikės apibrėžimų, liečiančių matricų sekas ir eilutes.

Žymėsime begalinę matricų seką. Apibrėžiame, kad ši seka *konverguoja* į matricą , jei bet kokiam egzistuoja toks numeris , kad visiems

Dar mums reikės matricų eilutės, kurią žymėsime . Šios eilutės dalinę sumą žymėsime . (Tai ne kas kita, kaip matricų sekos s pirmųjų narių suma.) Sakome, kad matricų eilutė konverguoja į matricą , jei jos dalinių sumų seka konverguoja į matricą

Skaičius vadinamas kvadratinės matricos *tikrine reikšme*, jei egzistuoja toks vektorius **,** kad galiotų lygybė **.** Vektorius vadinamas *tikriniu vektoriumi.*

Šią lygybę galime užrašyti **.** Nenulinį sprendinį ji gali turėti tik tuo atveju, jei .

Apskaičiavę determinantą, gautume n laipsnio pagal polinomą (vad. charakteringąjį polinomą). Kaip žinoma iš algebros, toks polinomas turi n šaknų (kai kurios gali būti kompleksinės, kai kurios sutampančios) Todėl bendru atveju n eilės kvadratinė matrica taip pat gali turėti n tikrinių reikšmių ir atitinkamai n tikrinių vektorių.

Naudinga žinoti, kad tikrinių reikšmių sandauga , matricos deter­mi­nantui; jų suma (vad. matricos *pėdsaku* *trace* tr(A))

Matrica vadinama *išskaidoma*, jei egzistuoja toks netuščias jos indeksų poaibis kad visiems Pavyzdys. Imkim matricą

Jei paimsim , matysim, kad , todėl ši matrica išskaidoma.

Dabar jau galime formuluoti svarbiausią šio modelio analizei Perrono-Frobenijaus teoremą.

Jei neneigiama neišskaidoma kvadratinė matrica, tai

1. ji turi teigiamą realią tikrinę reikšmę
2. ši reikšmė nekartotinė charakteringojo polinomo šaknis;
3. ši reikšmė ne mažesnė už visų kitų tikrinių reikšmių modulius ;
4. šią reikšmę atitinka teigiamas tikrinis vektorius **.**

Dabar galime grįžti prie (4) – pagrindinės nagrinėjamo modelio lygties.

**30 Sąnaudų-produkcijos (*input-output*) modelio produktyvumas**

Sąnaudų-produkcijos modelis vadinamas *produktyviu*, jei kiekvienam egzistuoja tokskad

Produktyvumo sąlyga reiškia, kad bet kokiai galutinio produkto struktūrai egzistuoja tokia gamybos struktūra, kad toks galutinis produktas galėtų būti pagamintas. Mus domins sąlygos, kurioms esant suformuluotas modelis yra produktyvus.

Produktyvumo sąlygos formuluojamos įvairiai. Pradėsime nuo vienos iš jų.

**Teiginys:** Tegu - neišskaidoma matrica, tenkinanti sąlygą , ir bent viena šių nelygybių griežta. Tada modelis produktyvus.

Prieš pereidami prie įrodymo, aptarsime prielaidas. Kadangi matricos elementai parodo, kiek į-tosios šakos produkcijos sunaudojama j-tosios šakos produkcijos vienetui pagaminti, suprantama, kad jie neneigiami (teigiami arba nuliai). Matricos neišskaidomumas reiškia, kad nėra šakų grupės, kuri būtų izoliuota ta prasme, kad netiektų produkcijos ne savo grupės šakoms. Arba nenaudotų savo gamybai kitų, negu savo grupės šakų produkcijos.

Sąlyga reiškia, kad matricos stulpelių sumos neviršija vieneto, o bent vieną jų mažesnė už vienetą. Tai turėtų būti akivaizdu: juk j-tasis stulpelis parodo, kiek eurų kitų šakų produkcijos reikia panaudoti, kad būtų pagaminta j-tosios šakos produkcijos už vieną eurą. Kažin, ar galėtų egzistuoti tokia šaka, kurios produkto vieneto, verto vieno euro, gamybai reikėtų sąnaudų didesnių už vieną eurą.

Taigi prielaidas galime laikyti pakankamai realistiškomis ir pereikim prie teiginio įrodymo. Suskaidysim jį į keletą tarpinių teiginių.

1. Matrica turi realią tikrinę nekartotinę reikšmę , kuri didesnė už visų kitų tikrinių reikšmių modulius, ją atitinka teigiamas tikrinis vektorius

Visi šio tarpinio teiginio tvirtinimai išplaukia iš Perrono-Frobenijaus teoremos, išskyrus tai, kad Šį faktą teks įrodyti. Lygybę padauginam iš kairės iš . Gauname

Tačiau ir bent viena šių nelygybių griežta, o todėl **.** Iš čia

todėl .

2. Egzistuoja matrica, atvirkštinė matricai , t.y. matrica . Iš tikrųjų, jei matrica neturėtų atvirkštinės, jos determinantas būtų nulis: . Tačiau tokiu atveju lygtis turėtų nenulinį sprendinį , ir būtųTai reikštų, kad matricaturi tikrinę reikšmę, lygią vienetui. Tačiau juk nustatėm, kad didžiausia tikrinė reikšmė mažesnė už vienetą, todėl prielaida, kad neturi atvirkštinės, buvo neteisinga.

3.Dabar parodysim, kad atvirkštinė matrica lygi matricos laipsnių eilutės sumai:

(5)

Iš pradžių įsitikinsim, kad kai . Naudokimės tuo, kad galime apskaičiuoti kaip vektoriaus didžiausią elementą (nes normą apibrėžėme kaip didžiausią matricos stulpelių elementų modulių sumą, mūsų atveju dėl matricos neneigiamumo - kaip didžiausią matricos stulpelių elementų sumą). Galime parašyti seką

nes dėl to, kad

Taigi Bet ar gali nors vienas eilutės elementas neartėti prie nulio? Jei taip būtų, tai ir visa sandauga su taip pat neartėtų prie nulio, nes Vadinasi visos stulpelių sumos artėja prie nulio, taigi ir .

Dabar grįžkim prie matricos laipsnių eilutės ir pažymėkim s jos pirmųjų narių sumą . Kaip aiškinomės anksčiau, norėdami įrodyti eilutės konvergavimą į turime įrodyti, kad į šią reikšmę konverguoja , kitaip tariant, įrodyti , kai . Skaičiuojam, atlikdami paprasčiausius veiksmus su matricomis:

Todėl nes, kaip jau įrodėme, kai .

4.Dabar grįžkim prie pagrindinio teiginio. Lygtį galime perrašyti kaip **.** Dabar matome, koks bebūtų , galime rasti (apskaičiuoti) atitinkamą , kuris taip pat bus neneigiamas, nes matrica ir visi jos laipsniai neneigiami.

Mes įrodėme vieną iš pakankamų produktyvumo sąlygų. Gali būti formuluojamos ir kitokios produktyvumo sąlygos. Paminėsime kai kurias.

* Egzistuoja .
* Matrica turi turi didžiausią nekartotinę realią tikrinę reikšmę
* Matrica yra produktyvi, t.y. egzistuoja kad **.**
* Matricos visi pagrindiniai minorai teigiami (Hawkinso-Simono kriterijus).

Pagrindiniai minorai – tai nuo viršutinio kairiojo kampo sudaromų matricų determinantai.

*Pastaba*. Lygybė yra akivaizdus geometrinės progresijo begalinės sekos sumos analogas:

**30 Sąnaudų-produkcijos (*input-output*) modelis kaip ekonominės analizės priemonė**

Išsiaiškinę sąnaudų-produkcijos modelio produktyvumo sąvoką ir kriterijus, galime pereiti prie aptarimo, kaip produktyvumo sąlygą tenkinantis modelis gali būti panaudotas analizei. Remkimės jo užrašymu

čia ir toliau patogumo dėlei žymėsime .

Sakykime, mes numatome, kad galutinio produkto reikės gaminti vienetu daugiau. Kitaip tariant, vietoje mūsų modelyje atsiranda **.** Kaip tada turės pasikeisti visų šakų gamybos apimtys? Pažymėję tą pokytį , galime užrašyti

Iš čia matome, kad **.** Taigi matricos j-tasis stulpelis parodo, kiek pasikeis visų šakų gamybos apimtys, jeigu j-tojo galutinio produkto reikės pagaminti vienetu daugiau.Panašiai galima apskaičiuoti ne tik vienetinio, bet ir bet kokį galutinio produkto pokyčio įtaką gamybos apimtims. Jei dydžiui suteikiame pokytį , tai

Iš čia matome, kad **.** Atkreipkime dėmesį, kadpagal (5) tai galime užrašyti ir kitaip:

Ši lygybė turi aiškią ekonominę prasmę: visos šakos turi pagaminti ne tik papildomą produktą , bet dar ir tai, kas reikalinga, kad jis būtų pagamintas, t.y. , bet ir šitam pagaminti turi būti dar pagaminta ir t.t.Pavyzdžiui, papildomam automobilių kiekiui pagaminti reikia ne tik pagaminti pačius automobilius, bet dar papildomai pagaminti metalo, elektros, chemijos produktų, būtinų automobilių gamybai; tam metalui, elektrai ir chemijos prekėms pagaminti vėlgi reikia papildomos elektros, staklių, pastatų ir t.t. „be galo“, ką ir išreiškia begalinė matricos laipsnių eilutė.

***Pavyzdys*.** Tegu turime trijų „šakų“ ūkį, o matrica yra

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 0,200 | 0,150 | 0,300 |
| 0,100 | 0,100 | 0,400 |
| 0,250 | 0,400 | 0,100 |

Nesunku įsitikinti, kad šios matricos pagrindu sudarytas modelis produktyvus (matrica neišskaidoma, stulpelių sumos mažesnės už 1). Skaičiuojame

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 0,800 | -0,150 | -0,300 |
| -0,100 | 0,900 | -0,400 |
| -0,250 | -0,400 | 0,900 |

ir jai atvirkštinę

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1,578 | 0,619 | 0,801 |
| 0,461 | 1,566 | 0,850 |
| 0,643 | 0,868 | 1,711 |

Jei galutinio produkto apimtys bus kaip nurodyta žemiau, tai nesunku patikrinti, kad gausim šakų produkcijos apimtis **,** otarpinis produktas bus  **:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 200,00 | 547,09 | 347,09 |
| 180,00 | 501,46 | 321,46 |
| 150,00 | 541,50 | 391,50 |

Jei padidėtų nuo 180 iki 200 (20 vienetų) nesunkiai apskaičiuotume, kad nauji visų šakų produkcijos dydžiai būtų

Dabar nagrinėkim sudėtingesnį pritaikymą analizei. Dar kartą atkreipkim dėmesį, kad matricos stulpeliuose esantys dydžiai parodo, kiek į šakos produkcijos vertės vienetą įneša panaudota kiekvienos šakos produkcija. Mūsų aukščiau nagrinėtame pavyzdyje pirmosios šakos produkto 1 euro vertės vienetą sudaro 20 centų pačios pirmosios šakos savo reikmėms panaudotas produktas, 10 centų - antrosios šakos panaudotas produktas ir 25 centus trečiosios šakos panaudotas produktas, viso 55 centai. O kur dar 45 centai? Tai darbo užmokestis, šakos pelnas, amortizacija ir dar daugelis kitų pirmosios šakos vieneto vertę sudarančių dalykų. Pažymėkim šį dydį ir panašiai padarykime su visomis šakomis. Taigi turėsime lygybes Užrašę tai matricomis ir vektoriais, gausime

Kaip ir ankstesniame tyrime, dabar bandykime įvertinti, kaip pasikeis šakų produkcijos vertės (kainos), jei i-tojoje šakoje vienetu reikės padidinti, sakykim, darbo užmokestį. Kitaip tariant, vietoje mūsų lygtyje turėsime **.** Pabrangs ne tik i-tosios šakos produkcija, bet ir visų šakų, kurios naudojasi i-tosios šakos produktu, produkcija, o tada dar kartą – visų šakų, kurios naudoja pabrangusių šakų produkciją ir t.t. Šitą „begalinį“ procesą galime kaip ir anksčiau įvertinti matricos pagalba. Tegu šakų produkcijos vertės (kainos) pokytis (užrašymo patogumui laikom, kad tai vektorius-eilutė). Tada

Todėl matricos i-toji eilutė parodo visų šakų produktų vienetų verčių (kainų) pokyčius, jei i-tojoje šakoje padidėja darbo užmokestis. Grįžkim prie mūsų pavyzdžio

**Pavyzdys.** Nagrinėjome trijų „šakų“ ūkį, o matrica buvo

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 0,200 | 0,150 | 0,300 |
| 0,100 | 0,100 | 0,400 |
| 0,250 | 0,400 | 0,100 |

Apskaičiuosime eilutę

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 0,450 | 0,350 | 0,300 |

Radome matricai atvirkštinę

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1,578 | 0,619 | 0,801 |
| 0,461 | 1,566 | 0,850 |
| 0,643 | 0,868 | 1,711 |

Jei dabar antrosios šakos darbuotojams už produkcijos vieneto pagaminimą reikėtų mokėti 10 centų daugiau, t.y. vietoj 0,35 turėtume dydį 0,45, tada naujos anksčiau eurą kainavusio produkto vieneto vertės (kainos) būtų

Taip galime įvertinti, kiek kurios šakos produkcija brangsta dėl didėjančio darbo apmokėjimo vienoje iš šakų. Pavyzdžio atveju antrosios šakos darbo užmokesčio padidinimas 10 centų padidino tos šakos produkcijos vieneto kainą 15,7 centų, kitų – atitinkamai 4,6 ir 8,5 centais.

Dar vienas galimas įvertinimas – kaip kurios nors šakos galutinio produkto padidėjimas atsilieptų išlaidoms darbo užmokesčiui. Jei yra išlaidos šakose darbo užmokesčiui produkcijos vienetui pagaminti, o  **,** kaip jau išsiaiškinom, parodo papildomas visų šakų gamybos apimtis, reikalingas j šakos galutinio produkto papildomam vienetui pagaminti, tai sandauga kaip tik ir parodys, kiek visose šakose reikės papildomai sumokėti darbo užmokesčio. Pats dydis yra *tiesioginis efektas* – parodo pačioje j šakoje reikalingą darbo užmokesčio padidėjimą, o likusi dalis yra *netiesioginis efektas* – parodys išlaidų darbo užmokesčiui padidėjimą visose kitose šakose.

Mūsų pavyzdyje, kur 20 vertės vienetų padidinome antrosios šakos galutinio produkto gamybą, gavome, kad šakų gamybos apimtys didėja 20

Jei tai 20 yrakaip ir reikia tikėtis20 (nes bus gaminama 20 vertės vienetų daugiau), o iš to dydžio 20·0,35·1,566 = 10,96 yra tiesioginis efektas antroje šakoje, likusieji 9,04 – kitose šakose.