**Iškiliojo programavimo uždavinių sprendimo pavyzdžiai**

Besąlyginio minimizavimo atveju funkcijos dalines išvestines pagal kiekvieną kintamąjį prilyginti nuliui ir išspręsti gautą dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą. Gautos nežinomųjų reikšmės ir bus ieškomas sprendinys.

Jei reikalaujama, kad nežinomieji būtų neneigiami, sprendimas sudėtingesnis.

**1 pavyzdys.** Sprendžiam uždavinį

(min) $2x\_{1}^{2}+6x\_{1}x\_{2}+5x\_{2}^{2}+10x\_{1}-12x\_{2}$ ; $x\_{1}\geq 0; x\_{2}\geq 0$

Patikrinam tikslo funkcijos iškilumą. Tikslo funkcijos Hesses matricos

$$\left(\begin{matrix}4&6\\6&10\end{matrix}\right)$$

pagrindiniai minorai teigiami: 4 ˃ 0; 4·10 – 6·6 ˃ 0. Taigi funkcija iškilioji ir turime iškiliojo programavimo uždavinį.

Pirmųjų išvestinių vektorius:

**h(x)** = ( $4x\_{1}+6x\_{2}+10;6x\_{1}+10x\_{2}-12$)

Būtinos ir pakankamos minimumo sąlygos **h(x) ≥ 0; h(x)x =0** šiuo atveju atrodo taip:

$$4x\_{1}+6x\_{2}+10 \geq 0$$

$$6x\_{1}+10x\_{2}-12\geq 0$$

$$\left(4x\_{1}+6x\_{2}+10\right)x\_{1}+\left(6x\_{1}+10x\_{2}-12\right)x\_{2}=0.$$

Jei laikytume, kad $x\_{1}˃ 0, x\_{2}˃ 0$ tada reiškiniai skliaustuose lygūs nuliui, ir gauname dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą:

$$4x\_{1}+6x\_{2}+10=0$$

$$6x\_{1}+10x\_{2}-12=0$$

Jos sprendinys $x\_{1}=-43, x\_{2}=27$ netenkina neneigiamumo sąlygos, todėl bandom kitą variantą: $x\_{1}= 0, x\_{2} ˃ 0.$

Kadangi $x\_{2} ˃ 0$ , turi būti $ 6x\_{1}+10x\_{2}-12=0$, taigi $x\_{2}= 12/10$. Šis sprendinys tenkina visas būtinas ir pakankamas sąlygas (patikrinkit), todėl jis ir yra galutinis uždavinio sprendinys.

**2 pavyzdys** . Sprendžiam uždavinį su apribojimais

(min) $5x\_{1}^{2}-6x\_{1}x\_{2}+2x\_{2}^{2}-10x\_{1}$; $x\_{1}+x\_{2}\leq 20. x\_{1}\geq 0; x\_{2}\geq 0$

 Patikrinam tikslo funkcijos ir leistinų planų aibės iškilumą. Tikslo funkcijos Hesses matricos

$$\left(\begin{matrix}10&-6\\-6&4\end{matrix}\right)$$

pagrindiniai minorai teigiami: 10 ˃ 0; 10·4 – (-6)·(-6) ˃ 0. Apribojimai tiesiniai, todėl turime iškiliojo programavimo uždavinį.

Užrašom jam Lagrange‘o funkciją

$$λ\left(x,p\right)=φ\left(x\right)+p\left(g\left(x\right)-b\right).$$

Jos pavidalas šiam konkrečiam uždaviniui

$$λ\left(x,p\right)=5x\_{1}^{2}-6x\_{1}x\_{2}+2x\_{2}^{2}-10x\_{1}+p\left(x\_{1}+x\_{2}-20\right).$$

Sudarom lygčių ir nelygybių sistemą balno taškui surasti:

$$\frac{∂λ\left(x,p\right)}{∂x}\geq 0, \frac{∂λ\left(x,p\right)}{∂x}x=0;\frac{∂λ\left(x,p\right)}{∂p}\leq 0, p\frac{∂λ\left(x,p\right)}{∂x}=0, x\geq 0,p\geq 0.$$

Sprendžiamam uždavinių ši sistema atrodo taip:

$$\frac{∂λ\left(x,p\right)}{∂x\_{1}}=10x\_{1}-6x\_{2}-10+p\geq 0$$

$$\frac{∂λ\left(x,p\right)}{∂x\_{2}}=-6x\_{1}+4x\_{2}+p\geq 0$$

$$\frac{∂λ\left(x,p\right)}{∂x}x=\left(10x\_{1}-6x\_{2}-10+p\right)x\_{1}+\left(-6x\_{1}+4x\_{2}+p\right)x\_{2}=0$$

$$\frac{∂λ\left(x,p\right)}{∂p}= x\_{1}+x\_{2}-20\leq 0$$

$$p\frac{∂λ\left(x,p\right)}{∂p}= p(x\_{1}+x\_{2}-20)=0$$

$$x\_{1}\geq 0; x\_{2}\geq 0;p\geq 0.$$

Toliau reikia rasti šios sistemos sprendinį. Pradėti galima nuo prielaidos, kad visi nežinomieji teigiami. Tada visos nelygybės tenkinamos kaip lygybės (kodėl?) ir turime tris lygtis su trim nežinomaisiais.

$$10x\_{1}-6x\_{2}-10+p=0$$

$$-6x\_{1}+4x\_{2}+p=0$$

$$ x\_{1}+x\_{2}-20=0$$

Jas išsprendę, gausime sprendinį. x1 = 8,077; x2 =11,923; p=0,769.

Tačiau jei kuris iš nežinomųjų išsprendus būtų neigiamas, reikia nagrinėti kitą variantą, kai vienas kuris nežinomųjų nulis, ir vėl ieškoti sprendinio.